QA
1
J6836
sér.4
t.3E

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemathm03pari

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME TROISIÈME

Année 1894.

36916
21/10/94

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1894

G11
.N156
no. 1
c.2E

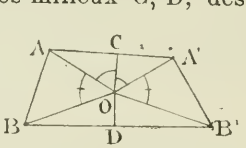
JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

SUR LES CENTRES DE ROTATION

par M. **Aug. Poulain**, à Angers.

Pour établir l'existence du centre de rotation de deux figures *directement* égales (c'est-à-dire pouvant se recouvrir par simple glissement), il existe une démonstration classique très simple, celle de Chasles. J'ai signalé dans le *J. S.* (1891, p. 193) qu'elle prête à une objection. J'en apporte aujourd'hui la solution (*).

Soit la droite AB qu'on veut amener, par une rotation, en A'B', de manière que A tombe en A' et B en B'. Pour cela, on élève des perpendiculaires sur les milieux C, D, des droites AA', BB'. Soit O le point de concours. Pour que la démonstration puisse s'achever, il faut que O soit tellement situé que les triangles égaux OAB, OA'B' le soient *directement*. Ou encore, les moments de O par rapport aux *segments* AB, A'B' doivent être de même signe. Or, jusqu'ici, on négligeait d'établir qu'il en est ainsi. Prouvons-le.



Supposons d'abord que les perpendiculaires en C et D se rencontrent en un seul point O. Par construction, CO détermine toujours deux triangles rectangles *inversement* égaux, OCA, OCA'. Si, de plus, les triangles OAB, OA'B' étaient

(*) Elle m'a été suggérée par le « piège mathématique » que M. Laisant vient de faire connaître dans *Mathesis* (septembre 1893, p. 224). Mais la démonstration s'est transformée pour s'adapter aux diverses positions défectueuses qu'on peut supposer au point O. Ces « pièges » ont l'avantage de bien montrer que, dans certaines démonstrations de géométrie, on introduit, sans s'en rendre compte, certaines hypothèses de situation.

dans le même cas (comme dans la figure ci-jointe, qui est fausse), l'angle COB serait la somme (ou la différence) de deux angles, et l'angle COB′, la somme (ou la différence) d'angles égaux à ceux-là, mais de sens contraires. Dès lors, ces angles COB, COB′ seraient eux-mêmes égaux et de sens contraires; et CO coïnciderait, au moins en prolongement, avec la bissectrice *intérieure* de BOB′, c'est-à-dire avec OD; ce qui serait contre l'hypothèse.

Si maintenant on suppose que CO, DO coïncident, la question est encore plus simple. On prouve alors, facilement, que le point de concours de AB et A′B′ est un centre de rotation.

Les considérations précédentes montrent que O *ne peut se trouver que dans deux des quatre angles déterminés par deux segments homologues prolongés; ce sont ceux où il a, par rapport aux segments, des moments de même signe.*

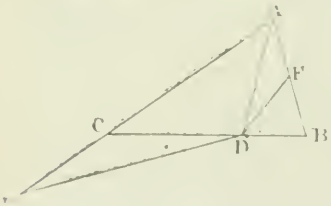
LE CALCUL DE LA BISSECTRICE

Par M. **E. Lauvernay.**

Théorème. — *Dans un triangle* ABC, *ayant tracé la bissectrice* AD *de l'angle* A, *on porte sur* AC, *à partir de* C, *la longueur* CE = CD; *et, à partir de* B, *sur* BA, *la longueur* BF = BD, *démontrer que l'on a*

$$\overline{AD}^2 = AE.AF.$$

Les triangles ADE, AFD sont équiangles. En effet, le triangle CED étant isoscèle, on a



$$AED = \frac{ACB}{2}.$$

Le triangle ADF donne :

$$\widehat{ADF} = 2^d - \frac{A}{2} - \widehat{AFD}.$$

Or $\widehat{AFD} = 2^d - \widehat{DFB}$.

Mais DFB étant isoscèle, on a

$$\widehat{DFB} = 1^d - \frac{B}{2};$$

par suite, $\widehat{AFD} = 1^d + \frac{B}{1} = 1^d - \frac{A+B}{2} = \frac{C}{2} = \widehat{AED}.$

Enfin, par hypothèse, les angles EAD, DAF sont égaux. Les triangles ADE, AFD sont donc semblables et l'on peut écrire

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AF}.$$

Corollaire. — *Calcul de* AD.

On a $AE = b + CD$, $AF = c - BD$;

or

$$\frac{CD}{b} = \frac{DB}{c} = \frac{a}{b+c},$$

donc $\overline{AD}^2 = AE.AF = \left(b + \frac{ab}{b+c}\right)\left(c - \frac{ac}{b+c}\right)$,

ou, enfin,

$$\overline{AD}^2 = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}.$$

Le cas de la bissectrice extérieure se traite de la même façon.

SUR CERTAINES GÉNÉRALISATIONS
DE L'ÉQUATION DE PELL (*)

On sait que le problème de Pell a pour but la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$2x^2 = y^2 + z^2.$$

Parmi les équations qui renferment celle-ci comme cas particulier, on peut citer la suivante

$$(1) \qquad nx^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,$$

relation renfermant $n + 1$ inconnues $x, y_1, y_2, \ldots y_n$. Nous nous proposons de montrer qu'*elle admet une infinité de solutions entières, quel que soit* n.

1. — Considérons, à cet effet, l'identité

$$(2) \quad \begin{cases} (x-y_1)^2+(x-y_2)^2+\ldots+(x-y_n)^2 = nx^2+y_1^2+\ldots+y_n^2 \\ \qquad\qquad - 2x(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \end{cases}$$

(*) Nous avons donné (*Journal*, 1884, pages 15 et 19) une notice bibliographique sur cette équation.
(Consultez aussi *la solution de la question 360*, donnée par M. Catalan, *J. S.* 1893, p. 22.)

En tenant compte de (1), on a

$$(3)\quad \begin{cases} (x-y_1)^2+(x-y_2)^2+\ldots+(x-y_n)^2 = 2nx^2-2x(y_1+\ldots+y_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2x(nx-y_1-y_2\ldots-y_n). \end{cases}$$

Posons alors

$$(4)\quad x-y_1=\alpha_1,\quad x-y_2=\alpha_2,\quad \ldots\quad x-y_n=\alpha_n,$$

l'égalité précédente devient :

$$(5)\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2 = 2x(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

D'après ce résultat, s'il existe une solution, en nombres entiers, de l'équation (1), cette égalité devra être résolue pour des valeurs entières, *positives ou négatives*, des inconnues α_1, α_2, ... α_n, x.

Réciproquement, à toute solution entière de (5) correspond une solution entière de (1).

En effet, imaginons une solution entière de (5); les égalités (4) permettront de trouver pour y_1, y_2, ... y_n des valeurs entières. Portons ces valeurs dans l'identité (2); celle-ci est vérifiée, quelles que soient les quantités $x, y_1, y_2 \ldots y_n$; en outre, l'égalité (3) étant accordée, il en résulte que les nombres considérés vérifient l'équation (1).

En résumé. toute solution de (1) vérifie (5), et réciproquement.

2. — Parmi les solutions entières, en nombre infini, qui satisfont à l'égalité (5), nous signalerons les suivantes.

Si l'on considère toutes les solutions entières, en nombres positifs ou négatifs, de l'équation

$$(6)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 2\ (*),$$

(*) On ne peut pas, évidemment, supposer

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n=0,$$

puisque l'égalité (5) donnerait alors

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2\ldots+\alpha_n^2=0.$$

Mais on serait tenté de poser, d'abord,

$$(A)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1.$$

L'égalité (5) devient, dans cette hypothèse,

$$(B)\qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n=2x.$$

Il est facile d'observer que (A), (B) sont incompatibles, car elles donnent, par combinaison,

$$2x+2\Sigma\alpha_1\alpha_2=1;$$

égalité manifestement impossible à vérifier par des nombres entiers positifs ou négatifs.

On pourrait poser

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=20.$$

en prenant pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ des *nombres pairs arbitraires*, et en déterminant α_n d'après (6), ces valeurs, transportées dans (5), donnent pour x une valeur entière. Les équations (4) permettent ensuite de calculer $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Application. — Par exemple, on propose de résoudre en nombres entiers l'équation

$$3x^2 = y^2 + z^2 + t^2.$$

D'après la méthode indiquée, on doit d'abord résoudre l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2x(\alpha + \beta + \gamma).$$

En prenant

$$\alpha = 10, \quad \beta = -6, \quad \gamma = -2,$$

on a une solution, en nombres pairs, de l'équation

$$\alpha + \beta + \gamma = 2.$$

Donc

$$100 + 36 + 4 = 4x,$$

ou

$$x = 35.$$

Puis y, z, t se déterminent par les égalités

$$x - y = \alpha, \quad x - z = \beta, \quad x - t = \gamma.$$

On trouve

$$y = 25, \quad z = 41, \quad t = 37.$$

Comme vérification, on doit avoir

$$3(35)^2 = (25)^2 + (41)^2 + (37)^2.$$

Remarque. — Dans le calcul précédent, $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ sont des nombres pairs arbitraires; il y a donc *une infinité de solutions.*

3. — Je dois dire, avant d'aller plus loin, que l'idée de généraliser l'équation de Pell m'a été inspirée par une question que M. Émile Lemoine m'avait adressée pour être proposée aux lecteurs du *Journal de Mathématiques.*

Voici quelle était cette question :

Si entre trois nombres entiers différents x, y, z *on a la relation*

$$2x^2 = y^2 + z^2,$$

le nombre $2x(2x - y - z)$ *sera la somme de deux carrés entiers.*

Mais on ne généralise pas, en agissant ainsi, les solutions qui correspondent au cas où $\theta = 1$. Il est bien évident, en effet, que si $x, y_1, y_2 \ldots y_n$ constituent une solution entière de l'équation proposée, les quantités θx $\theta y_1, \theta y_2, \ldots \theta y_n$, quel que soit l'entier θ, donnent une solution entière de cette même équation.

Cette question, comme l'indiquait la lettre d'envoi, se résout bien simplement en observant que

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 = y^2 + z^2 + 2x^2 - 2x(y + z).$$

En tenant compte de l'hypothèse, on a

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 = 2x(2x - y - z),$$

et la proposition se trouve établie.

On voit comment cette remarque nous a conduit bien naturellement à généraliser l'équation de Pell, comme nous venons de le montrer.

4. — Parmi les équations de Pell généralisées, on peut encore citer la suivante

$$nx^2 = y^2 + (n - 1)z^2,$$

laquelle, pour $n = 2$, donne l'équation de Pell.

Le calcul précédent donne une infinité de solutions de cette équation en prenant :

1° Pour α_1 un nombre pair arbitraire ;

2° Pour $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, des nombres pairs, arbitraires, *égaux*.

Application. — Prenons, par exemple, l'équation

$$3x^2 = y^2 + 2z^2.$$

Nous lui substituons, en conservant les notations employées au § 2, conformément à la marche que nous avons donnée, l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2x(\alpha + \beta + \gamma).$$

Avec les équations auxiliaires

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \quad x - y = \alpha, \quad x - z = \beta, \quad x - t = \gamma.$$

On a donc, dans ce cas, $\beta = \gamma$,

et les équations simplifiées sont

$$\alpha^2 + 2\beta^2 = 2x(\alpha + 2\beta),$$

$$\alpha + 2\beta = 2, \quad x - y = \alpha, \quad x - z = \beta.$$

Prenons, *arbitrairement*, pour α un nombre pair ; par exemple, faisons $\alpha = 6$. Alors, on a $\beta = -2$; puis $x = 11$, $y = 5$, $z = 13$.

Comme vérification, on doit avoir

$$3(11)^2 = (5)^2 + 2(13)^2.$$

5. — Les questions envisagées plus haut rentrent toutes dans le type

$$(7) \qquad Mx^2 = Ay^2 + Bz^2 + \ldots + Kt^2,$$

lorsqu'on suppose

$$M = A + B + \ldots + K.$$

La méthode que nous avons suivie jusqu'ici s'applique, pour des raisons évidentes, à l'équation (7).

1° Proposons-nous, par exemple, de résoudre l'équation

$$5x^2 = 2y^2 + 3z^2.$$

Le tableau des équations auxiliaires, dressé conformément aux principes que nous avons exposés, est, dans cet exemple, constitué de la manière suivante :

$$2\alpha^2 + 3\beta^2 = 2x(2\alpha + 3\beta),$$
$$2\alpha + 3\beta = 2,$$
$$x - y = \alpha, \qquad x - z = \beta.$$

En prenant pour β un nombre pair arbitraire, par exemple $\beta = 6$, on a, successivement,

$$\alpha = -8, \qquad x = 59, \qquad y = 67, \qquad z = 5 .$$

Comme vérification, on doit avoir

$$5(59)^2 = 2(67)^2 + 3(53)^2.$$

2° Soit encore à résoudre

$$7x^2 = 2y^2 + 5z^2.$$

On posera $\qquad 2\alpha + 5\beta = 2,$

et, en prenant $\beta = 2$, on trouve immédiatement

$$x = 13, \qquad y = 17, \qquad z = 11.$$

On a bien, comme vérification,

$$7(13)^2 = 2(16)^2 + 5(11)^2.$$

6. — Dans le cas le plus général, on opérera comme nous allons l'indiquer.

L'identité

$$\lambda_1(x - y_1)^2 + \lambda_2(x - y_2)^2 + \ldots + \lambda_n(x - y_n)^2$$
$$= x^2\sum\lambda_1. - 2x\sum\lambda_1 y_1 + \sum\lambda_1 y_1^2,$$

si l'on suppose

$$x^2\sum\lambda_1 = \sum\lambda_1 y_1^2,$$

donne

$$\sum\lambda_1(x - y_1)^2 = 2x[x(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) - (\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y^n)].$$

En posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$x - y_1 = \alpha_1, \ldots x - y_n = \alpha_n,$$

l'équation précédente devient

$$\sum \lambda_1 \alpha_1^2 = 2x \sum \lambda_1 \alpha_1.$$

Pour résoudre l'équation proposée, il suffira de poser

$$\sum \lambda_1 \alpha_1 = 2,$$

et de prendre pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ des entiers pairs, arbitraires; puis, on choisira α_{n-1} de façon que

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1} - 2,$$

soit divisible par λ_n. Ceci peut être réalisé d'une infinité de manières, en résolvant une équation indéterminée, du premier degré, à deux inconnues.

7. — On peut observer que de nombreuses équations indéterminées se rattachent à l'équation de Pell généralisée.

Prenons, pour en citer un exemple, l'équation

(8) $$x^2 + y^2 - xy = z^2. \quad (*)$$

Pour résoudre cette équation, observons qu'en la considérant comme une équation du second degré en x, son discriminant

$$y^2 - 4(y^2 - z^2)$$

doit être un carré parfait. En effet, s'il en était autrement, les racines seraient incommensurables.

Posons donc $$4z^2 - 3y^2 = K^2.$$

Cette équation résolue par la méthode indiquée dans cette Note donne, par exemple,

$$z = 7, \qquad y = 5, \qquad K = 11.$$

On trouve ensuite $$x = 8.$$

Comme vérification, on doit avoir

$$(8)^2 + (5)^2 - (8 \times 5) = (7)^2.$$

L'équation en x qui a donné la solution précédente et qui est obtenue en faisant, dans (8),

$$y = 5, \qquad z = 7$$

(*) Comme on le voit, cette équation correspond au problème suivant : *Trouver deux nombres entiers tels que la somme des carrés de ces nombres, diminuée de leur produit, soit un carré.*

admet une seconde racine $x = -3$. En la changeant de signe, on obtient une solution $(x = 3,\ y = 5,\ z = 7)$ de l'équation

$$x^2 + y^2 + xy = z^2.$$

8. — En terminant, nous signalerons encore une généralisation de l'équation de Pell, en indiquant une solution de l'équation

$$x^2 = y^2 + pz^2,$$

dans laquelle p désigne un nombre entier, quelconque.

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{x+y}{pz} = \frac{z}{x-y} = t.$$

On en déduit $\quad x + y = pzt, \quad t(x-y) = z,$

et, par conséquent,

$$2x = \frac{z(pt^2+1)}{t}, \qquad 2y = \frac{z(pt^2-1)}{t}.$$

Le nombre t, *que nous supposons entier*, doit donc diviser le produit $z(pt^2+1)$; or, il est premier avec pt^2+1; donc, il divise z.

Posons donc $\quad z = 2\lambda t,$

et nous avons

$$x = \lambda(pt^2+1), \qquad y = \lambda(pt^2-1).$$

Dans ces formules on peut donner aux paramètres λ, t, des valeurs entières, quelconques d'ailleurs.

Remarque. — Si l'on suppose $y = 1$, l'équation

$$x^2 = 1 + pz^2$$

admet toujours une solution entière si p est égal à $4n(n-2)$, n désignant un nombre entier.

En posant

$$x = 2n^2 - 4n + 1, \qquad z = n - 1,$$

on a, en effet,

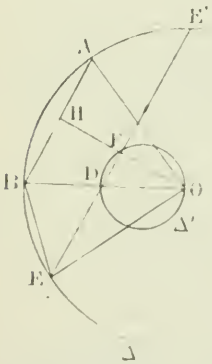
$$4n(n-2)(n-1)^2 + 1 = (2n^2 - 4n + 1)^2.$$

G. L.

SUR L'INSCRIPTION APPROCHÉE
DE L'ENNÉAGONE RÉGULIER
ET SUR LA TRISECTION DE L'ANGLE

L'inscription d'un polygone régulier, avec une approximation suffisante pour être employée dans la pratique, présente, au point de vue graphique, un intérêt manifeste. Nous avons déjà, à diverses reprises, rappelé, dans ce journal (*), quelques tracés plus ou moins connus, se rapportant aux constructions de cette espèce. En voici une, très remarquable, se rapportant à l'inscription de l'ennéagone régulier. Nous l'empruntons à l'*Educational Times* (numéro de septembre 1893, p. 405). Elle est due à M. Pressland; la solution a été donnée *(loc. cit.)*, par M. Woodall.

1.—Soit Δ une circonférence de centre O; prenons AOB=45° et soit D le milieu de OB. Sur OD, comme diamètre, décrivons une circonférence Δ'. La perpendiculaire OH, abaissée de O sur AB, rencontre Δ' en F. La semi-droite FD étant tracée, rencontre Δ en un point E; BE représente, avec une approximation que nous allons faire connaître, le côté de l'ennéagone régulier.



En posant $\widehat{BOE} = 2\theta$,

on a $\widehat{OBE} = \widehat{OEB} = \frac{\pi}{2} - \theta.$

D'ailleurs $\widehat{BDE} = \frac{3}{8}\pi;$

par suite, on peut écrire

$$\widehat{DEO} = \frac{3}{8}\pi - 2\theta, \qquad \widehat{BDE} = \frac{1}{8}\pi + \theta.$$

Les triangles BED, DOE donnent, par conséquent,

(*) Voyez: *Journal*, 1886, p. 187, *sur la construction de* π; *Id.*, 1885, p. 45 et 60: *sur le pentagone* d'Albert Durer; *Id.* 1890, p. 14: *sur l'ennéagone régulier*.

$$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{8}+\theta\right)} = \frac{DE}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)},$$

$$\frac{DO}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}-2\theta\right)} = \frac{DE}{\sin 2\theta}.$$

En observant que BD = DO, on déduit, de ces égalités, l'équation

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}+\theta\right)\sin 2\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{8}-2\theta\right)\cos\theta.$$

En développant et en tenant compte des égalités

$$\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{3\pi}{8}, \qquad \cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8},$$

on trouve, pour déterminer l'inconnue θ, l'équation

$$3\,\mathrm{tg}^2\,\theta + 4\,\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} - 1 = 0.$$

Comme on a $\qquad \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1,$

on trouve, finalement,

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{15 - 8\sqrt{2}} - 2(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

En calculant la fraction précédente, on trouve

$$0{,}36384\ldots$$

La valeur correspondante de θ est

$$19^\circ\,59{,}6' = 19^\circ\,59'\,36''$$

d'après le calcul de M. Woodall; et

$$19^\circ\,59'\,37{,}75''$$

d'après celui de M. Pressland. Dans tous les cas, on voit que θ diffère de 20° d'un angle plus faible qu'une demi-minute et, au point de vue pratique, la construction précédente est parfaite.

2. — A propos de ces constructions approximatives, je veux encore signaler celle que M. Catalan a fait connaître autrefois (*) pour résoudre, par approximation, le problème de la trisection de l'arc, construction qu'il m'a récemment rappelée.

(*) Voyez *Mélanges mathématiques*, t. Ier, page 365.
Au Congrès de Besançon, au mois d'août dernier, j'ai présenté un com-

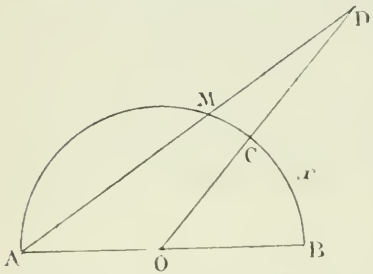
Soit, sur une demi-circonférence ABC, *l'arc donné* BC = x. *Sur le rayon* OC *prolongé, on prend* CD = OA. *On trace la droite* AMD. *Si* M *est le point où elle coupe* ACD, *on a, sensiblement,*

$$MC = \frac{1}{3}x.$$

La formule (approximative) qui donne cette construction est

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{4 + 5\cos x}{5 + 4\cos x}.$$

Il y aurait lieu de rechercher, dans la construction précédente, une limite de l'erreur commise.



3. — Une autre construction approchée de la trisection de l'angle a été récemment signalée (*).

Prenons un angle POQ et soit OM′ la bissectrice de cet angle. Par un point M, pris sur le côté OP, menons MM′ parallèle à BA, jusqu'à sa rencontre en M′ avec OM′. Soit R le milieu de MM′; ROQ représente, avec une certaine approximation, suffisante, en général (**), le tiers de l'angle POQ.

Il est facile de voir quel est le rapport qui existe entre les tangentes trigonométriques des angles POQ, ROQ.

Posons $ROM' = x$, $ROQ = y$, nous avons

$$M'OQ = OM'M = x + y, \quad M'MQ = 2x + 2y.$$

Par suite,

$$\frac{OR}{RM'} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x}, \quad \frac{OR}{RM} = \frac{\sin(2x+2y)}{\sin y}$$

---

pas trisecteur. On en trouvera la description et la théorie dans l'Annuaire de l'Association française, qui paraîtra prochainement. En ouvrant les branches du compas, l'instrument marque, de lui-même, la trissectrice de l'angle formé par les branches.

(*) Dans le journal *la Universidad* du mois d'octobre 1893, p. 127, publié à San Salvador. La construction est due à M. Max. Cadiz; le compte rendu auquel nous faisons allusion ici est de M. Ricardo Fernandez Frias.

(**) Par exemple, si ABC = 60°, on trouve RBC = 20°16′; si ABC = 30°, RBC = 9°54′.

On en déduit

$$\sin x \quad \sin(2x + 2y) = \sin y \quad \sin(x + y),$$

ou $$2 \sin x \cos(x + y) = \sin y,$$

ou encore $$\sin(2x + y) - \sin y = \sin y.$$

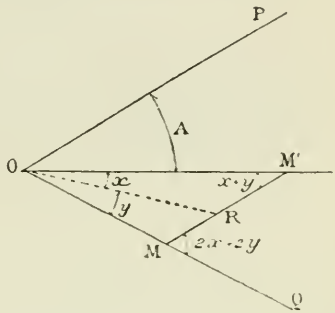
Finalement,

(1) $\sin(2x + y) = 2 \sin y$.

Posons

$$POQ = A,$$

alors $$x + y = \frac{A}{2}.$$



La relation (1) devient

$$\sin\left(x + \frac{A}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{A}{2} - x\right),$$

ou

$$\sin x \cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} \cos x = 2\left(\sin\frac{A}{2} \cos x - \sin x \cos\frac{A}{2}\right)$$

égalité de laquelle on déduit

$$3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Mais cette égalité n'entraîne pas

$$2x = \frac{A}{3},$$

comme le supposait, à tort, si nous avons bien compris l'article de M. F. Frias, M. Max. Cadiz. *G. L.*

CONSTRUIRE UNE ELLIPSE

CONNAISSANT L'UN DES DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS ÉGAUX ET UN POINT

Par M. **C. Margerie.**

Soient CC′ le diamètre et M le point donnés *(fig. 1)*.

MC, MC′ sont deux cordes supplémentaires, et les parallèles OP, OQ menées par le milieu O de CC′, à ces droites, sont deux diamètres conjugués. Il en résulte que si DE est la tangente en C à l'ellipse et OC_1, le demi-diamètre conjugué

de OC, droite que nous savons être parallèle à cette tangente, on a

$$CD \times CE = \overline{OC_1}^2 = \overline{OC}^2.$$

Nous sommes donc conduits au problème suivant *(fig. 2)* :

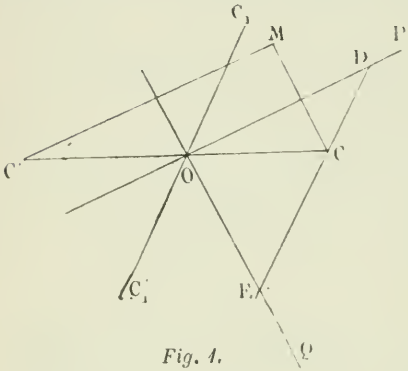


Fig. 1.

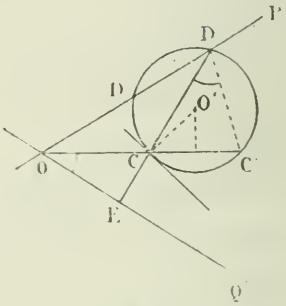


Fig. 2.

On donne un point C dans un angle POQ. Mener par ce point une sécante DE telle que $CD \times CE = \overline{OC}^2$. Supposons le problème résolu, prolongeons OC d'une longueur CC′ égale à OC et joignons C′ à D ; $CD \times CE = CO \times CC'$, donc l'angle COQ égale l'angle CDC′ : le point D est à l'intersection de OP et de l'axe capable de l'angle COQ décrit sur CC′.

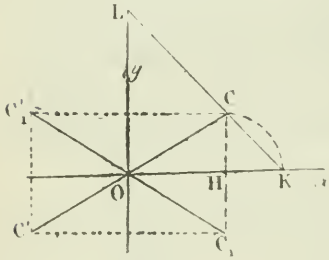


Fig. 3.

La tangente DE étant déterminée, le second des diamètres conjugués égaux C_1C_1' est lui-même déterminé. Les axes *(fig. 3)* sont dirigés suivant les bissectrices Ox, Oy des angles de CC′ et C_1C_1', le grand axe dans l'angle aigu COC_1. En abaissant CH perpendiculaire sur Ox, rabattant HC en HK et menant KC qui coupe Oy en L, CK est le demi-petit axe et CL le demi-grand axe.

Il résulte de la construction que le problème a au plus deux solutions ; il peut être impossible.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 273).

302. — *Trouver quatre entiers positifs, en progression arithmétique, de raison paire, tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

Soit $2r$ la raison, pour $r = 1$ et $r = 2$, pas de solution.

Pour $r = 3$

$$13^2 + 19^2 + 25^2 + 31^2 = 46^2.$$

Pour $r = 4$

$$7^2 + 15^2 + 23^2 + 31^2 = 42^2.$$

Pour $r = 5$

$$47^2 + 57^2 + 67^2 + 77^2 = 126^2.$$

Pour $r = 6$, on a la solution de : $r = 3$, où tous les nombres ont été doublés.

Pour $r = 7$

$$1^2 + 15^2 + 29^2 + 43^2 = 54^2.$$

$$101^2 + 115^2 + 129^2 + 143^2 = 246^2.$$

D'une manière générale, x étant le premier terme, on a à résoudre l'équation

$$x^2 + 6rx + 14r^2 = K^2$$

qui se ramène à

(1) $$K^2 - 5r^2 = y^2,$$

alors $x = y - 3r$.

L'équation (1) se résout d'une façon complète en posant

$$K = \frac{5r^2 + \alpha^2}{2\alpha}, \qquad y = \frac{5r^2 - \alpha^2}{2\alpha},$$

r étant donné, on prend pour α un nombre de la même parité que r, et pour écarter les solutions négatives, α doit être positif et inférieur à r, α doit diviser $5r^2$, et s'il est premier avec 5, il doit être choisi parmi les diviseurs de r, simplement.

303. — *Trouver neuf entiers positifs en progression arithmétique, et dont la somme des carrés soit un carré.*

On a à résoudre, le premier terme étant x, et le second membre $(3K)^2$:

$$9x^2 + 72rx + 204r^2 - 9K^2 = 0.$$

$x = y - 4r$, et en supposant $r = 3r'$, on a

$$K^2 - 60r'^2 = y^2.$$

Cette équation admet une infinité de solutions, il en est donc de même de la question posée.

$r' = 1$ donne :

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 = 48^2,$$

$r' = 2$ donne, en dehors de la solution obtenue en multipliant par 2, tous les nombres de la précédente :

$$35^2 + 41^2 + 47^2 + \ldots + 77^2 + 83^2 = 183^2.$$

$r' = 3$ donne :

$$98^2 + 107^2 + 116^2 + \ldots + 161^2 + 170^2 = 408^2.$$

304. — *Trouver onze entiers positifs, en progression arithmétique, tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est amené à résoudre

$$11K^2 - 10r^2 = y^2.$$

Cette équation admet une infinité de solutions, il en est donc de même de la question posée. En particulier, pour $r = 1$,

$$18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + \ldots + 27^2 + 28^2 = 77^2,$$
$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + \ldots + 47^2 + 48^2 = 143^2.$$

BACCALAURÉATS

Académie d'Alger.

(AVRIL 1893)

BACCALAUREAT COMPLET

Un tronc de cône est entièrement circonscrit à une sphère de rayon donné R, et on connaît la longueur l de son arête latérale.

On demande de calculer : 1° les rayons des deux bases ; 2° la surface totale du tronc de cône ; 3° le volume du solide.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Centre de gravité d'une pyramide ; 2° réduction du nombre des forces appliquées à un corps solide ; 3° condition de sensibilité d'une balance.

II. Expression trigonométrique du rayon R du cercle circonscrit à un triangle.

On donne les côtés a, b d'un triangle ; comment varie R, lorsque l'on fait varier l'angle C compris entre ses côtés.

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

I. On donne un plan $p\alpha p'$ perpendiculaire à la ligne de terre xy et un plan $q\beta q'$ dont les traces horizontales et verticales sont dans le prolongement l'une de l'autre. Démontrer par les procédés de la géométrie descriptive que l'intersection des deux plans fait des angles de 45° avec les plans de projection.

Construire à main levée et expliquer la figure.

II. Un trapèze rectangle pesant ABCD peut tourner autour d'un axe horizontal perpendiculaire à son plan et passant par le sommet C. Quel doit être le rapport des bases pour que, dans la position d'équilibre, ces bases soient horizontales ?

2e série. — I. Démontrer que l'expression

$$3\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + 4\left(\frac{x-2}{x-1}\right) + \frac{x^2 - x - 5}{(x-1)(x-2)}$$

est égale à 9, quelle que soit la valeur attribuée à x.

II. Quatre points, ABCD, invariablement reliés les uns aux autres, sont en ligne droite, et les distances AB, BC, CD sont égales. En A, dans la direction AB, on applique une force de 4^{kg}; en C et en D, on applique des forces parallèles et de sens contraire, quelles doivent être ces forces en grandeur et en direction pour que le système des quatre forces appliquées en ABCD soit en équilibre?

Académie de Besançon.

I. Étant donné un triangle rectangle ABC, dont l'hypoténuse CB est verticale, comparer les durées de chute d'un point pesant : 1° tombant librement de C en B; 2° tombant de C en A, le long du côté CA; 3° tombant de A en B, le long du côté AB.

Dans les trois cas, le point est supposé n'avoir pas de vitesse initiale.

II. Ranger par ordre de grandeur croissante les racines des deux équations :

$$x^2 + 2x - 1 = 0,$$
$$x^2 + 2ax - 1 = 0.$$

Académie de Bordeaux.

1re série. — I. Connaissant tous les éléments du triangle ABC, calculer tous les éléments du triangle A'B'C' dont les sommets sont les centres des cercles exinscrits relatifs au triangle ABC.

II. Les traces d'un plan αP et $\alpha P'$ font toutes deux, avec la ligne de terre, un angle de 45°. Quel est l'angle formé par ces deux droites?

2e série. — I. *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant; 2° Puissance d'un point; 3° Centre radical.

II. Trouver toutes les valeurs de x satisfaisant à l'équation

$$\cos^2 \frac{x-a}{2} + \cos^2 \frac{x+a}{2} = 1.$$

QUESTION 483

Solution par M. D'OCAGNE.

On a des jetons de deux espèces, les uns j *de rayon* r, *les autres* j' *de rayon* r'. *On dispose des jetons* j' *autour d'un jeton* j *de manière que chacun d'eux touche à la fois le jeton* j *et les deux jetons* j' *les plus voisins.*

1° A quelle condition la couronne formée par les jetons j' *se ferme-t-elle?*

2° Est-il possible de déterminer les rayons r *et* r' *de façon que l'on puisse à la fois, faire une couronne fermée de* j' *autour d'un* j *et une couronne fermée de* j *autour d'un* j' ?

(d'Ocagne.)

1° Si n' cercles de rayon r' forment une couronne fermée autour d'un cercle de rayon r, touché par chacun d'eux, on voit immédiatement que l'on a

$$(1) \qquad r' = (r + r') \sin \frac{\pi}{n'}$$

d'où

$$r' = r \frac{\sin \frac{\pi}{n'}}{1 - \sin \frac{\pi}{n'}}.$$

2° Pour qu'il y ait réciprocité, il faut qu'on ait à la fois, *n et n' étant des nombres entiers,*

$$(1) \qquad r' = (r + r') \sin \frac{\pi}{n'},$$

et

$$(2) \qquad r = (r + r') \sin \frac{\pi}{n};$$

d'où l'on déduit par addition

$$1 = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{\pi}{n'}.$$

Les quantités $\sin \frac{\pi}{n}$ et $\sin \frac{\pi}{n'}$ étant nécessairement positives, l'une d'elles, $\sin \frac{\pi}{n}$, par exemple, est au moins égale à $\frac{1}{2}$. On conclut de là que n ne peut avoir qu'une des valeurs 6, 5, 4, 3.

Pour $n = 6$, on a $n' = 6$, solution évidente *a priori*, mais qui ne répond pas précisément à la question, puisque alors $r = r'$.

Tout revient donc à reconnaître si on peut avoir, n' étant un nombre entier,

$$\sin \frac{\pi}{n'} = 1 - \sin \frac{\pi}{n} \qquad (\text{pour } n = 3, 4 \text{ ou } 5).$$

Or, on a

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Par suite, les trois équations qui viennent d'être définies sont de la forme

$$\sin \frac{\pi}{n'} = 1 - \sqrt{k}.$$

Nous allons voir qu'on ne peut satisfaire à une telle équation par une valeur entière de n'. En effet, on sait que l'on a, A_1, A_3, ... $A_{n'}$, B_2, B_4, ..., $B_{n'}$, étant commensurables:
$\sin n'a = A_1 \sin a + A_3 \sin^3 a + \ldots + A_{n'} \sin n'a$ (si n' est impair)
et
$\cos n'a = 1 + B_2 \sin^2 a + B_4 \sin^4 a + \ldots + B_{n'} \sin n'a$ (si n' est pair).

Si, dans ces formules, on remplace les premiers membres par 0, on a des équations dont les racines sont respectivement

$$\sin 0, \quad \sin\frac{\pi}{n'}, \quad \sin\frac{2\pi}{n'}, \quad \ldots, \quad \sin\frac{(n'-1)\pi}{n'},$$

et $$\sin\frac{\pi}{n'}, \quad \sin\frac{3\pi}{n'}, \quad \sin\frac{5\pi}{n'}, \quad \ldots, \quad \sin\frac{(2n'-1)\pi}{n'}.$$

Or, si on avait $\sin\frac{\pi}{n'} = 1 - \sqrt{k}$, l'une ou l'autre de ces équations (suivant la parité de n') admettrait aussi la racine conjuguée $1 + \sqrt{k}$, puisque ses coefficients sont commensurables, ce qui est absurde, toutes les racines de cette équation étant inférieures à l'unité.

Ainsi donc, la réciprocité en question ne peut pas être rigoureusement obtenue.

On peut toutefois donner une solution approchée du problème permettant de réaliser *pratiquement* des jetons répondant à la question.

Si, en effet, on calcule les angles α_1, α_2, α_3 définis par les équations

$$\sin\alpha_1 = 1 - \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{12},$$

$$\sin\alpha_2 = 1 - \sin\frac{\pi}{4} = 2\sin^2\frac{\pi}{8},$$

$$\sin\alpha_3 = 1 - \sin\frac{\pi}{5} = 2\sin^2\frac{3\pi}{20},$$

on trouve
$$\alpha_1 = 7^\circ 41' 57'',2 = 27717'',2,$$
$$\alpha_2 = 17^\circ 1' 52'',5 = 61312'',5,$$
$$\alpha_3 = 24^\circ 20' 38'' = 87638''.$$

Par suite, puisque $\pi = 648000''$,

$$\frac{\pi}{\alpha_1} = 23{,}378,$$

$$\frac{\pi}{\alpha_2} = 10{,}568,$$

$$\frac{\pi}{\alpha_3} = 7{,}394.$$

La première solution est relativement la plus approchée de la question posée.

Prenant $r = 1$, formons une couronne de 3 cercles ayant ce rayon et cherchons le rayon r_0 du cercle les touchant tous trois intérieurement. Nous avons, d'après la formule (2).

$$1 = (1 + r_0') \sin \frac{\pi}{3},$$

d'où
$$r_0' = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 0{,}154.$$

Formons maintenant une couronne de 23 cercles autour d'un cercle de rayon égal à 1. Le rayon r_1' de ces cercles sera donné, d'après la formule (1), par

$$r_1' = \frac{\sin \frac{\pi}{23}}{1 - \sin \frac{\pi}{23}} = 0{,}160.$$

Dès lors, si nous prenons

$$r' = \frac{r_0' + r_1'}{2} = 0{,}157,$$

on voit que, dans chaque cas, la différence entre la valeur de r' et celle qui conviendrait à ce rayon pour la solution exacte du problème ne sera que de 0,003. Si, par exemple, on prend $r = 0^m{,}05$, l'écart en question n'est que de $0^m{,}00015$, quantité pratiquement négligeable, puisque dans un dessin au trait un peu fort elle est de l'ordre de l'épaisseur du trait.

QUESTION 495

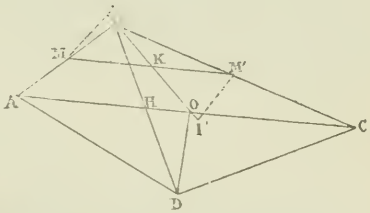
Solution par M. Youssoufian, de Constantinople.

Trouver la condition pour qu'un quadrilatère convexe puisse être partagé en quatre triangles équivalents ayant pour bases les côtés du quadrilatère et pour sommet commun un point intérieur.

Connaisssant trois sommets d'un quadrilatère satisfaisant à cette condition, trouver le lieu du quatrième sommet. (Dellac.)

Soit ABCD un quadrilatère satisfaisant à la condition cherchée. Soit O le point intérieur. Je dis que O doit se trouver sur l'une des diagonales, AC par exemple.

En effet, je trace OB, OA, OC. Les triangles AOB, BOC, sont équivalents. M et M', milieux de AB et BC, forment les triangles BMO, BM'O dont les surfaces sont équivalentes comme moitié des triangles AOB, BOC. La base BO étant commune aux triangles MBO, BOM', les hauteurs correspondantes MI, M'I' sont égales. Les deux triangles MIK, M'I'K sont égaux comme étant rectangles et ayant un côté égal et un angle égal; d'où MK = M'K. Si BO partage MM' en deux parties égales, elle partage la diagonale AC aussi en deux parties égales. Un raisonnement analogue montre que DO passe par le milieu de AC. Par suite le point O se trouve sur AC, en son milieu.



Il en résulte que la diagonale AC divise le quadrilatère en deux triangles équivalents, de base commune AC. On peut en déduire facilement que la diagonale BD rencontre AC en un point H tel que BH = DH.

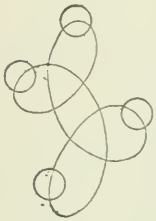
La condition cherchée est donc *que l'une des diagonales du quadrilatère coupe l'autre en son milieu.* Dans ce cas le milieu de l'autre diagonale est le point cherché.

Si l'on donne trois points A, B, C, on mène les médianes du triangle ABC, ces médianes sont les lieux des quatrièmes sommets du quadrilatère satisfaisant aux conditions du problème.

QUESTIONS PROPOSÉES

531. — Étant donné un carré, démontrer *rigoureusement* qu'il ne peut pas être partagé en trois parties superposables; autrement que par des parallèles à ses côtés.

(H. Laurent.)



532. — Étant donnée une ligne que l'on peut tracer d'un trait non interrompu, telle que celle-ci, représentée par la figure ci-contre de combien de manières peut-on la décomposer en d'autres jouissant de la même propriété, à savoir de pouvoir être tracées d'un trait non interrompu? *(H. Laurent.)*

533. — Un régiment marche à la cadence de 120 pas par minute; on demande quels sont les soldats qui poseront le pied droit sur le sol en même temps que la musique. Même problème en changeant la cadence. *(Lucien Lévy.)*

ERRATUM

Le tableau des questions non résolues, publié à la fin du numéro de décembre, renferme deux erreurs qui nous sont signalées par M. de Times.

1° *3e série, tome IV, 1890.* — La question n° 365 ne figure pas au tableau La question résolue sous ce numéro à la page 36 de l'année 1893 répond à une question de M. Brocard du *J. M.* de 1881 et non à la question n° 365 de M. E. Lauvernay du *J. E.* de 1890, et cette dernière question n'est pas résolue.

2° *4e série, tome Ier, 1892.* — La question n° 464 qui figure au tableau a une solution insérée page 215 de l'année 1893.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE 20, PARIS. — 26772-12-93.

REMARQUES CRITIQUES SUR LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES POLYNOMES ENTIERS

Par M. **Maurice Fouché**, professeur à Sainte-Barbe.

Les propriétés fondamentales des polynômes entiers, telles qu'on les établit généralement dans les Cours et les Traités d'Algèbre, présentent des difficultés sérieuses, au moins pour les commençants, à cause de la nécessité ou l'on croit être de démontrer préalablement qu'un polynôme entier en x qui est nul pour toutes les valeurs de x a tous ses coefficients nuls. La démonstration qu'on donne, le plus souvent, de cette propriété importante, repose sur des considérations de limite ; pour cette raison, elle est difficilement saisie par les commençants. Je crois qu'on peut éviter toute considération de limite et faire dépendre cette proposition de la simple théorie de la division de deux polynômes entiers, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x. Il faut d'abord établir que le reste de la division d'un polynôme entier par $x - a$ est égal au résultat de la substitution de a, à la place de x, dans le polynôme. La démonstration très simple de ce théorème qui consiste à faire $x = a$ dans l'identité

$$(1) \qquad A \equiv (x - a)Q + R,$$

a paru, à la plupart des auteurs, présenter une objection grave, en ce sens que si l'on fait $x = a$, le diviseur s'annule et que la division n'a plus aucun sens, dès que le diviseur est nul. De là, on a conclu à la nécessité d'établir préalablement la proposition importante que je rappelais tout à l'heure. Or, si l'on analyse convenablement la suite des idées, on reconnaîtra facilement que l'objection n'existe pas. Que veut dire en effet l'identité (1) ? L'objet de la division des polynômes entiers ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable x est de trouver des polynômes Q et R, le dernier R étant de degré inférieur au degré du diviseur, et tel que *le produit du diviseur par le quotient* Q, *calculé par la règle de la*

multiplication des polynômes, et augmenté du reste R, reproduise identiquement, c'est-à-dire terme par terme, le dividende A. Dès lors, il n'est pas nécessaire de démontrer que les deux membres de l'identité (1) ont les mêmes coefficients: cela est évident par définition, et il est non moins évident que les deux membres prendront la même valeur numérique, même pour la valeur $x = a$. Voici maintenant comment je comprends la suite des idées :

Corollaire I. — *Tout polynôme entier en* x *qui s'annule pour toute valeur de* x *a tous ses coefficients nuls.*

Corollaire II. — *Si deux polynômes entiers en* x, *prennent la même valeur numérique pour certaines valeurs de* x, *toutes différentes, et en nombre supérieur au degré de celui des deux polynômes qui a le plus grand degré, ces deux polynômes sont composés des mêmes termes.*

En effet, il suffit d'observer que la différence A — B des deux polynômes s'annule pour un nombre de valeurs différentes de x supérieur au degré de ce polynôme A — B.

On remarquera que le théorème précédent ne suppose pas d'autre proposition que celle d'après laquelle le produit ou la somme de deux ou plusieurs polynômes, calculée d'après la règle algébrique, prend toujours une valeur numérique égale au produit ou à la somme des valeurs numériques des facteurs, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres, et cela, sans aucune exception, proposition qui, je crois, n'est sujette à aucune contestation.

On remarquera aussi que le théorème III qu'on démontre, généralement en s'appuyant sur le théorème de d'Alembert, en est, en réalité, indépendant. Il peut y avoir intérêt à signaler cette indépendance, d'autant plus que le théorème de d'Alembert ne figure plus dans les programmes et pour ce motif, n'est pas, ordinairement, démontré dans les Cours de Mathématiques spéciales.

Enfin, les remarques relatives à la démonstration du théorème I s'appliquent exactement au théorème d'après lequel la décomposition fournie par la division algébrique

n'est possible que d'une seule manière, c'est-à-dire que, si l'on a :

$$BQ + R = BQ' + R',$$

les deux polynômes R et R′ étant chacun de degré inférieur au degré de B, les polynômes Q et Q′ seront identiques ainsi que les polynômes R et R′, *identique* signifiant que les deux polynômes sont composés des mêmes termes. Il convient cependant d'observer que, pour donner toute rigueur à la démonstration de cette dernière proposition, il faut établir préalablement que les deux polynônes $BQ - BQ'$ et $B(Q - Q')$ sont identiques au sens qui vient d'être indiqué; mais cette démonstration ne présente aucune difficulté.

Il me semble que les considérations qui précèdent sont de nature à simplifier un peu cette partie de l'Algèbre, et à soulager la mémoire des élèves.

Théorème I. — *Le reste de la division d'un polynôme entier en* x *par* x − a *est égal au résultat de la substitution de* a *à la place de* x *dans le dividende.*

En effet, on a, d'après la division

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R,$$

ce qui veut dire que, si l'on calcule le second membre d'après les règles de multiplication et d'addition des polynômes, on retrouvera exactement, terme par terme, le polynôme $f(x)$. Donc les deux membres prennent la même valeur numérique pour toute valeur de x, même pour la valeur $x = a$ qui annule le diviseur. Or R ne contient pas x, et si l'on fait $x = a$, on a

$$f(a) = R.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Pour qu'un polynôme entier en* x *soit divisible par* x − a, *il faut et il suffit qu'il s'annule quand on y fait* x = a.

Théorème II. — *Si un polynôme entier en* x *est divisible séparément par plusieurs binômes du premier degré :* x−a, x−b, x − c, *etc., dont les seconds termes,* a, b, c, *etc., sont tous différents entre eux, il est divisible par leur produit.*

Démonstration habituelle qui ne prête à aucune objection.

Théorème III. — *Si un polynôme entier, de degré* m *par rapport à* x, *s'annule pour plus de* m *valeurs différentes de la variable* x, *tous ses coefficients sont nuls.*

En effet, soient $a, b, c, \ldots l$, des valeurs au nombre de m choisies parmi celles pour lesquelles le polynôme s'annule. D'après le théorème I, le polynôme $f(x)$ sera divisible par $x - a$, $x - b$, ... $x - l$ et d'après le théorème II, il sera divisible par leur produit. On aura donc :

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots (x - l)Q.$$

Puisque $f(x)$ est du degré m, et qu'il y a m facteurs dans le second membre, Q sera du degré o, c'est-à-dire qu'il ne contiendra pas x. Les deux membres sont égaux pour toute valeur de x, puisque les multiplications indiquées dans le second membre reproduisent, terme par terme, le polynôme du premier membre $f(x)$. Or le second membre ne peut plus s'annuler pour une valeur de x différente de $a, b, c, \ldots l$, à moins que Q ne soit nul, et si Q est nul, en faisant les multiplications, on trouvera tous les termes des produits nuls séparément.

C. Q. F. D.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 17.)

305. — *Trouver seize entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est ramené à résoudre en nombres entiers l'équation

$$K^2 - 85r^2 = y^2,$$

qui admet une infinité de solutions.

Pour $r = 1$, (la raison étant $2r$), on trouve

$$27^2 + 29^2 + 31^2 + \ldots + 55^2 + 57^2 = 172^2.$$

Pour $r = 3$

$$337^2 + 343^2 + 349^2 + \ldots + 427^2 = 1532^2.$$

306. — *Trouver vingt-trois nombres entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation

$$23K^2 - 44r^2 = y^2,$$

qui admet une infinité de solutions.

En particulier, pour $r = 1$, on trouve

$$7^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + 29^2 = 92^2,$$
$$17^2 + 18^2 + 19^2 + \ldots + 39^2 = 138^2.$$

307. — *Trouver vingt-quatre nombres entiers positifs, en progression arithmétique, tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est ramené à résoudre l'équation

$$2K^2 - 575r^2 = 3y^2,$$

qui admet une infinité de solutions.

En particulier, pour $r = 1$, on a

(1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2 = 70^2,$$
$$9^2 + 10^2 + 11^2 + \ldots + 32^2 = 106^2,$$
$$20^2 + 21^2 + 22^2 + \ldots + 43^2 = 158^2,$$
$$25^2 + 26^2 + 27^2 + \ldots + 48^2 = 182^2,$$
$$44^2 + 45^2 + 46^2 + \ldots + 67^2 = 271^2,$$
$$75^2 + 76^2 + 77^2 + \ldots + 99^2 = 430^2.$$

La relation (1) est bien connue, il est même démontré que la somme des carrés des p premiers nombres entiers n'est un carré que pour $p = 24$.

308. — *Trouver vingt-cinq nombres entiers positifs, en progression arithmétique, tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est amené à résoudre l'équation

$$K^2 - y^2 = 52r^2,$$

qui admet une infinité de solutions.

En particulier, pour $r = 2$, on a

$$27^2 + 29^2 + 31^2 + \ldots + 75^2 = 265^2.$$

Pour $r = 3$ $\quad 80^2 + 83^2 + 86^2 + \ldots + 152^2 = 590^2.$

309. — *On ne saurait trouver trois, cinq, ni quatre (avec raison impaire) entiers positifs, en progression arithmétique, tels que la somme de leurs quatrièmes puissances soit elle-même une quatrième puissance.*

310. — *Un carré étant terminé par* 1 *ou* 9, *si le chiffre des dizaines est* 0, 4, *ou* 8, *celui des centaines est pair; si le chiffre des dizaines est* 2 *ou* 6, *celui des centaines est impair.*

311. — *Le nombre des centaines du carré d'un nombre terminé par* 5 *est le double d'un triangulaire.*

Le nombre des centaines d'un carré terminé par 21 *est de la forme*

$$(5n \pm 1)^2 \pm n.$$

Le nombre des centaines d'un carré terminé par 69 *est de la forme*

$$(5n \pm 1)^2 \pm 3n.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE :

« ... Je viens seulement, en prenant connaissance de la solution de la question 470 (*J. E.*, 1893, p. 229), d'apprendre que M. Neuberg a déjà rencontré le théorème sur le triangle, qui la constitue. Je n'aurais point sans cela proposé cette question. Je tiens toutefois à faire remarquer que je l'ai obtenue à titre de simple cas particulier d'un théorème absolument général, sur les systèmes de droites affectées de poids quelconques, qui se trouve incidemment énoncé dans un Mémoire que j'ai récemment publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* (63e cahier, p. 21, théor. VI). Je saisirai, en outre, cette occasion pour attirer l'attention des amateurs de géométrie élémentaire sur la notion de *barycentre symétrique* que j'ai introduite, là, en vue de certaine application à la Géodésie, mais qui me semble de nature à donner naissance à quelques exercices intéressants de Géométrie, et qui permet notamment d'étendre, aux polygones quelconques, nombre de propriétés déjà remarquées pour le triangle... »

BACCALAURÉATS

Académie de Caen.

NOUVEAU RÉGIME

Résoudre le système d'équations :

$$\sin x + \sin y = a$$
$$\cos x + \cos y = b$$

connaissant a et b. Que faut-il pour que le problème soit possible?

I. *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Épure (avec légende explicative) donnant la distance d'un point à une droite; 2° Intersection d'une parabole avec une droite donnée; 3° Jour solaire vrai et moyen.

ANCIEN RÉGIME

Résoudre le système d'équations proposé pour le nouveau régime.

II. Calculer les côtés a et c de l'angle droit d'un triangle rectangle et la hauteur h issue du sommet de cet angle, connaissant l'hypoténuse ainsi que le rapport $\frac{b+c}{h}$.

Académie de Clermont.

1re série. — I. Définition du rapport de deux grandeurs de même espèce.

Théorème. — Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au quotient des nombres qui les mesurent. (On se bornera, pour la démonstration, au cas où les deux grandeurs sont commensurables avec l'unité.)

II. Deux cercles O et O′ de rayon R et r sont tangents extérieurement en A. On demande de mener deux cordes rectangulaires AB, AC, telles que dans le triangle rectangle ABC, la hauteur AH ait une longueur donnée h.

Discussion. Construction géométrique.

2e série. — I. Surface de la sphère.

II. — Mener une droite parallèle au côté AB d'un triangle équilatéral ABC, de manière que le segment EF, déterminé par les côtés AC, BC, soit vu sous un angle droit d'un point O donné sur la base AB. Calculer la distance des droites EF, AB. — Discussion.

BACCALAUREAT CLASSIQUE

I. *Choisir une des trois questions suivantes:* 1° Surface de la sphère; 2° surface et volume du tronc de cône; 3° volume de la sphère.

II. *Même problème que pour le baccalauréat complet, 2e série.*

Académie de Grenoble.

I. On donne l'équation.

$$(12m+7)x^2 - 3(14-3m)x + 11 - 3m = 0$$

et on demande la valeur qu'il faut attribuer à m: 1° pour que les racines soient réelles; 2° pour que l'unité soit comprise entre les racines; enfin on résoudra l'équation pour $m = \frac{5}{7}$.

II. Si, par deux points fixes, AB, pris dans le plan d'un cercle C, on fait passer des cercles C′, C″ ... qui rencontrent le cercle C, toutes les cordes communes au cercle C et aux divers cercles C′, C″ ... passent par un même point.

Démonstration. Application. Tracer, par AB, un cercle tangent au cercle C.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Choisir une des trois questions suivantes:* 1° Somme des carrés des n premiers nombres entiers; 2° Variation du quotient des deux trinômes du second degré $\frac{2x^2+3x-1}{x^2-3x+1}$. Représentation graphique; 3° Formule des annuités.

II. Étant donné un cercle O de rayon R, on demande de déterminer le rayon d'un second cercle O′ passant au centre O du premier et tel que la corde commune AB soit dans un rapport donné avec OO′.

Académie de Lille.

I. *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Connaissant la mesure du volume d'un parallélipipède rectangle, démontrer qu'un parallélipipède droit a pour mesure le produit de l'une quelconque de ses bases, soit parallélogramme, soit rectangle, par la hauteur correspondante ; 2° Démontrer, en vue d'arriver à la mesure du volume d'un prisme, qu'un prisme triangulaire équivaut à la moitié d'un parallélipipède de base double et de même arête ; 3° Connaissant la mesure du volume d'un tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles, établir celle du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles.

II. On considère, sur une ellipse donnée, un point M situé à une distance r de l'un des foyers, et on imagine une circonférence tangente à l'ellipse en M et ayant son centre sur le grand axe. Trouver la position de ce centre et la longueur du rayon. — Comment faut-il choisir le point M pour que la circonférence passe par l'un des foyers ? — Comment faut-il le choisir pour que la circonférence ait un rayon donné ?

Académie de Lyon.

1re série. — Dans un cercle de rayon R, on mène une corde AB et des tangentes à ses extrémités. On demande de calculer les angles et la surface du triangle ABC. — Données : $R = 33^m,55$; $AB = 29^m,60$.

2e série. — I. Volume engendré par un triangle isocèle tournant autour d'un axe passant par son sommet. Rapport de ce volume avec celui du secteur sphérique correspondant.

II. Un tronc de prisme quadrangulaire a pour bases deux trapèzes (dans des plans non parallèles). On donne la hauteur h et les bases b, b' de la section droite de ce prisme, les arêtes latérales a et c qui rencontrent l'autre base b'. On propose d'établir la formule qui représente le volume de ce tronc et de démontrer, en outre, qu'on aura entre les lignes a, b, c, a', b', c' la relation $\frac{a-c}{b} = \frac{a'-c'}{b'}$.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Volume engendré par un triangle isoscèle tournant autour d'un axe passant par son sommet. Rapport de ce volume avec celui du secteur sphérique correspondant ; 2° On fait tourner un segment circulaire, ainsi que le secteur correspondant, autour d'un même diamètre. Exprimer les deux volumes obtenus et leur rapport ; 3° Volume d'un tronc de prisme.

II. Un tronc de prisme quadrangulaire a pour bases deux trapèzes (dans les plans non parallèles). On donne la hauteur h et les bases b, b' de la section droite de ce tronc de prisme, les arêtes latérales a et c qui rencontrent la base b, et les arêtes a' et c' qui rencontrent l'autre base b'. On propose d'établir la formule qui représente le volume de ce tronc et de démontrer, en outre, qu'on aura entre les lignes a, b, c, a', b', c' la relation

$$\frac{a-c}{b} = \frac{a'-c'}{b'}.$$

QUESTION 494

Solution par M. W. J. Greenstreet (M. A.).

Démontrer les formules suivantes, dans lesquelles A, B, C *désignent les trois angles d'un triangle.*

1° $\sin 2A \sin^2 B + \sin 2B \sin^2 C + \sin 2C \sin^2 A$
$= 3 \sin A \sin B \sin C + \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$

2° $\sin 2A \cos^2 B + \sin 2B \cos^2 C + \sin 2C \cos^2 A$
$= \sin A \sin B \sin C - \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$

3° $\cos 2A \sin^2 B + \cos 2B \sin^2 C + \cos 2C \sin^2 A$
$= -\cos A \cos B \cos C - \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A).$

4° $\cos 2A \cos^2 B + \cos 2B \cos^2 C + \cos 2C \cos^2 A + 1$
$= -3 \cos A \cos B \cos C + \cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A).$

5° $\sin 2A \cos 2B + \sin 2B \cos 2C + \sin 2C \cos 2A$
$= -2 \sin A \sin B \sin C - 2 \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A).$

6° $\cos 2A \cos 2B + \cos 2B \cos 2C + \cos 2C \cos 2A + 1$
$= -2\cos A \cos B \cos C + 2\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)$(*).

(Joseph Gillet.)

Nous avons

$$\Sigma \sin 2\overline{A-B} = -4\Pi \sin \overline{A-B},$$
$$\Sigma \cos 2\overline{A-B} = 4\Pi \cos \overline{A-B} - 1,$$
$$\Sigma \sin 2A = 4\Pi \sin A,$$
$$\Sigma \cos 2A = 4\Pi \cos A - 1.$$

Donc

6° $$\Sigma \cos 2A \cos 2B + 1 = \frac{1}{2}\Sigma \cos 2C + \frac{1}{2}\Sigma \cos 2\overline{A-B} + 1$$
$$= -2\Pi \cos A + 2\Pi \cos \overline{A-B}.$$

5° $$\Sigma \sin 2A \cos 2B = -\frac{1}{2}\Sigma \sin 2C + \frac{1}{2}\Sigma \sin 2\overline{A-B}$$
$$= -2\Pi \sin A + 2\Pi \sin \overline{A-B}.$$

(*) La formule 6° est rectifiée. Le second membre commence par un signe —, et non par un signe +.

$$4^\circ \quad \Sigma \cos 2A \cos^2 B = \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A(1 + \cos 2B)$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A + \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A \cos 2B$$

$$= -2\Pi \cos A - \frac{1}{2}\Pi \cos A + \Pi \cos \overline{A-B} - \frac{1}{2}.$$

$$\Sigma \cos 2A \cos^2 B + 1 = -3\Pi \cos A + \Pi \cos \overline{A-B}.$$

$$3^\circ \quad \Sigma \cos 2A \sin^2 B = \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A - \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A \cos 2B$$

$$= -2\Pi \cos A - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \Pi \cos A - \Pi \cos \overline{A-B}$$

$$= -\Pi \cos A - \Pi \cos \overline{A-B}.$$

$$2^\circ \quad \Sigma \sin 2A \cos^2 B = \frac{1}{2} \Sigma \sin 2A + \frac{1}{2} \Sigma \sin 2A \cos 2B$$

$$= 2\Pi \sin A - \Pi \sin A - \Pi \sin \overline{A-B} \text{ (par } 5^\circ)$$

$$= \Pi \sin A - \Pi \sin \overline{A-B}.$$

$$1^\circ \quad \Sigma \sin 2A \sin^2 B = \frac{1}{2} \Sigma \sin 2A - \frac{1}{2} \Sigma \sin 2A \cos 2B$$

$$= 2\Pi \sin A + \Pi \sin A + \Pi \sin \overline{A-B}$$

$$= 3\Pi \sin A + \Pi \sin \overline{A-B}.$$

On peut dériver 3° de 4°, en observant que

$$\Sigma \cos 2A \cos^2 B = \Sigma \sin 2A - \Sigma \cos 2A \sin^2 B,$$

et, de la même manière, (2) de (1).

Nota. — Solution analogue par M. Foucart, élève au lycée Michelet.

QUESTION 495

Solution par M. Aletrop (de Madrid).

Trouver la condition pour qu'un quadrilatère convexe puisse être partagé en quatre triangles équivalents ayant pour bases les côtés du quadrilatère et pour sommet commun un point intérieur.

Connaissant trois sommets d'un quadrilatère satisfaisant à cette condition, trouver le lieu du quatrième sommet.

(Dellac.)

Supposons que le quadrilatère ABCD satisfasse à la condition demandée, et soit O le sommet commun des triangles qui le forment.

Pour établir l'équivalence de ces quatre triangles, il suffit de l'établir pour ces triangles pris deux à deux. De l'équivalence des triangles de même base ABO et ADO, BCO et DCO on conclut l'égalité de leurs hauteurs, les perpendiculaires abaissées de B et O sur AO, CO; autrement dit, que les droites AO, CO passent par le milieu I de BO.

Ici se présentent deux cas: 1° les points O, I sont distincts; cette ligne OI passant par les points A et C se confond avec la diagonale AC; donc cette diagonale passe par le milieu de l'autre; 2° les deux points O, I se confondent; alors, l'équivalence des triangles AOB, BOC exige que la diagonale BD passe par le milieu de AC.

La condition demandée est donc que l'une des diagonales du quadrilatère passe par le milieu de l'autre, et alors le point cherché est le milieu de la première diagonale.

On voit facilement que, étant donnés trois sommets A, B, C d'un quadrilatère convexe satisfaisant à cette condition, on a, pour premier lieu du quatrième sommet D, la droite PQ, menée, parallèlement à AC, par le point B′ symétrique de B par rapport à AC et comprise entre BA, BC. Un second lieu du point O est le prolongement de la médiane BI, au-delà de I. Il existe, en outre, deux autres couples de droites analogues déterminées au moyen de BA, AC et de BC, AC.

Remarque. — Si on n'assujettit pas le quadrilatère à être convexe, le lieu se compose des droites PQ, AI prolongées indéfiniment.

QUESTION 498

Solution par M. W. J. Greenstreet *(M.A)*.

Dans un triangle quelconque le produit des distances des centres des cercles exinscrits est égal au périmètre du triangle, multiplié par 8 fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

(E.-N. Barisien.)

Soient O_1, O_2, O_3 les centres des cercles exinscrits.

On a
$$O_1O_2 = 4\,R\cos\frac{A}{2},$$
et, par conséquent,
$$(O_1O_2)(O_2O_3)(O_3O_1) = 64R^3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$
Mais on sait que
$$8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = a + b + c = 2p, \quad \text{etc.}$$

Nota. — Solutions diverses par MM. de Times; E. Foucart; Grolleau; Droz-Farny.

QUESTION 501

Solution par M. A. Droz-Farny.

La différence entre les périmètres de deux polygones réguliers convexes semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même circonférence, est plus petite qu'un côté du polygone inscrit, dès que le nombre des côtés du polygone est supérieur à cinq.

(Lucien Lévy.

On a
$$\text{périmètre inscrit} = 2n\sin\frac{\pi}{n},$$
$$\text{pér. circonscrit} = 2n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}.$$
Il s'agit donc de prouver que pour $n > 5$ on a
$$n\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right) < \sin\frac{\pi}{n},$$
ou, après quelques transformations,
$$\cos\frac{\pi}{n} > \frac{n}{n+1}.$$
Mais on sait que
$$\cos X > 1 - \frac{X^2}{2},$$
donc
$$\cos\frac{\pi}{n} > \frac{2n^2 - \pi^2}{2n^2}.$$

Or, il est facile de prouver que, l'on a pour $n > 5$,

$$\frac{2n^2}{2n^2 - \pi^2} > \frac{n}{n+1},$$

ou

$$\frac{2n^2}{n+1} > \pi^2.$$

En effet, pour $n = 6$,

$$\frac{72}{7} > 10 > \pi^2,$$

et la fonction $\frac{2n^2}{n+1}$ croît très rapidement. *A fortiori* on a donc

$$\cos\frac{\pi}{n} > \frac{n}{n+1}; \qquad (n > 5).$$

QUESTION 502

Solution par M. A. Droz-Farny.

Soient φ_a, φ_b, φ_c *trois forces appliquées suivant les côtés* AC, CA, AB *d'un triangle* ABC.

1° Démontrer que leur résultante est dirigée suivant la droite harmoniquement associée au point dont les coordonnées barycentriques sont $\frac{a}{\varphi_a}, \frac{b}{\varphi_b}, \frac{c}{\varphi_c}$.

2° Trouver les expressions qui donnent la grandeur de la résultante et les angles qu'elle fait avec les côtés du triangle.

(L. Bénézech.)

La résultante des deux forces φ_a et φ_b fixées en C, divise l'angle extérieur C en deux angles dont les sinus sont entre eux comme $\varphi_a : \varphi_b$. Par conséquent, cette résultante divise le côté opposé en un point C′ tel que $C'A : C'B = \frac{\varphi_a}{a} : \frac{\varphi_b}{b}$.

La troisième force se trouvant sur AB, la résultante générale passera par C′ et par les points A′, B′, analogues sur les côtés BC et AC.

Le point C″, conjugué harmonique de C′ par rapport à AB,

divise cette droite intérieurement de manière que $C''A : C''B = \frac{\varphi_a}{a} : \frac{\varphi_b}{b}$. Pour tous les points de la droite CC'' on aura donc

$$\frac{\beta}{\left(\frac{b}{\varphi_b}\right)} = \frac{\alpha}{\left(\frac{a}{\varphi_a}\right)}.$$

Les trois droites CC'', AA'', BB' se couperont donc en un point K déterminé par

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{a}{\varphi_a} : \frac{b}{\varphi_b} : \frac{c}{\varphi_c},$$

K est donc harmoniquement associé à la résultante $A'B'C'$.

D'un point O, quelconque, menons des droites équipollentes à φ_a, φ_b, φ_c et projetons le système, d'abord sur φ_a, puis sur la perpendiculaire menée par O à φ_a. On a :

$$x = \varphi_a + \varphi_b \cos(180^\circ - C) + \varphi_c \cos(180^\circ + B)$$
$$y = \varphi_b \sin(180^\circ - C) + \varphi_c \sin(180^\circ + B);$$

et, par suite, la résultante R est donnée par la formule

$$R^2 = \varphi_a^2 + \varphi_b^2 + \varphi_c^2 - 2\Sigma\varphi_a\varphi_b \cos C.$$

L'angle φ qu'elle forme avec φ_a, se calcule par la relation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\varphi_b \sin C - \varphi_c \sin B}{\varphi_a - (\varphi_b \cos C + \varphi_c \cos B)}.$$

QUESTION 503

Solution par M. A. Droz-Farny.

Les droites qui joignent les points de Brocard (ω et ω') *d'un triangle, aux sommets* A, B, C, *interceptent, sur les cercles déterminés par les points* (ωBC), (ωCA), (ωAB); ($\omega' BC$), ($\omega' CA$) ($\omega' AB$), *des segments* l_a, l_b, l_c: l'_a, l'_b, l'_c *qui satisfont aux égalités :*

$$cl + al_b + bl_c = bl'_a + cl'_b + al'_c = 2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

(Louis Bénézech.)

La circonférence (ωBC) est tangente, en C, au côté AC; on a donc

$$A\omega(A\omega + l_a) = b^2, \qquad l_a = \frac{b^2 - \overline{A\omega}^2}{A\omega}.$$

$$l_a = \frac{b^2 - \dfrac{b^2 \sin^2 \omega}{\sin^2 A}}{\dfrac{b \sin \omega}{\sin A}} = \frac{b(\sin^2 A - \sin^2 \omega)}{\sin \omega \sin A}$$

$$= \frac{b \sin (A + \omega) \sin (A - \omega) \sin \omega}{\sin^2 \omega \sin A}.$$

Mais on sait que

$$\frac{\sin (A + \omega)}{\sin \omega} = \frac{b^2 + c^2}{bc}, \qquad \frac{\sin (A - \omega)}{\sin \omega} = \frac{a^2}{bc},$$

$$l_a = \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{bc^2 \sin A} \sin \omega, \qquad cl_a = \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2\Delta} \sin \omega.$$

Il en résulte que

$$cl_a + al_b + bl_c = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{\Delta} \sin \omega,$$

$$cl_a + al_b + bl_c = 2\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Nota. — Me Ve F. Prime, de Bruxelles, nous a adressé une solution fondée, comme la précédente, sur la considération des *circonférences adjointes;* on appelle ainsi celles qui passent par deux sommets, tangentiellement à un côté. Elles donnent les points de Brocard par une construction très simple, que nous rappellerons, à ce propos: *Le point de Brocard* ω' *s'obtient en prenant:* 1° *une circonférence adjointe* Γ (A, B, AC, par exemple), 2° *la corde* AD *parallèle à* BC; 3° *le point* ω' *où* CD *rencontre* Γ.

Dans ce calcul, suivant une notation assez répandue aujourd'hui, Δ désigne l'aire du triangle.

QUESTION 504

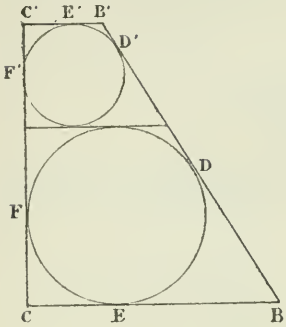
Solution par M. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet

Si un trapèze birectangle est tel que les deux circonférences inscrites à ce trapèze aient une tangente commune intérieure parallèle aux bases, la moitié de sa hauteur est moyenne géométrique entre les bases, et la moitié du côté BB′ *est moyenne arithmétique entre ces mêmes bases.* (Lauvernay.)

1° Soient a, b les bases BC, B′C′; $2h$ la hauteur; R et R′ les rayons des circonférences inscrites; D, E, F, D′, E′, F′,

les points de contact des circonférences avec les côtés. On a

$$2R + 2R' = 2h.$$



Donc

$$DD' = FF' = h,$$
$$BD = BE = a - R$$
$$B'D' = B'E' = b - R',$$
$$BB' = DD' + BO + B'D'$$
$$= h + a + b - (R + R') = a + b.$$

2° D'autre part, en menant, de B', une perpendiculaire sur BC on forme un triangle rectangle qui donne

$$4h^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2,$$
$$h^2 = ab.$$

Nota. — Nous avons reçu une solution de M. Grolleau, répétiteur au au lycée de Marseille et une autre de M. A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentury.

M. César Spino ajoute, à la solution qu'il nous adresse, la remarque suivante :

La moyenne arithmétique entre deux quantités est supérieure à leur moyenne géométrique, sauf dans le cas où ces grandeurs sont égales. — La proposition est ici démontrée géométriquement. Dans le cas de grandeurs égales, le trapèze dégénère en rectangle.

Nous avons reçu également, de M. César Spino, une solution de la question 493, trop tardivement pour pouvoir la mentionner dans le numéro de décembre.

QUESTIONS 505, 506, 507

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

505. — *La hauteur de ce trapèze* (*) *étant constante, trouver : 1° le lieu du point de rencontre des diagonales ; 2° le lieu du point de rencontre de la tangente commune parallèle aux bases avec la droite joignant l'un des sommets de l'angle droit du trapèze au point de contact du côté avec la circonférence inscrite dans cet angle.* (Lauvernay.)

1° Soit CD la tangente commune parallèle aux bases. Menons la seconde tangente commune intérieure OI.

(*) Voyez l'énoncé précédent (question 504).

CD étant perpendiculaire sur AA′, OI est, par raison de symétrie, perpendiculaire sur BB′.

De plus, on a $OI = OA = OA'$.

En effet, appelons E, H les points de contact de la tangente OI avec les circonférences O″ et O′, de rayons r et R, et F, G les points de contact de la tangente CD avec les mêmes circonférences, on a

$$OA = OE + r = DF + CF = CD,$$
$$OA' = OH + R = DG + CG = CD,$$

or, $CD = OI$,

d'où $OI = OA = OA'$.

La circonférence décrite sur AA′ comme diamètre est donc tangente à BB′, au point I.

De ce point I, abaissons la perpendiculaire IK sur AA′; cette droite et les deux diagonales concourent en un point P, milieu de IK.

En effet, soit Q le point où AB′ rencontre IK. On a (*)

$$\frac{KQ}{A'B'} = \frac{AK'}{AA},$$
$$\frac{KP}{AB} = \frac{A'K}{AA'}$$

d'où,

$$\frac{KQ}{KP} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AK}{A'K},$$

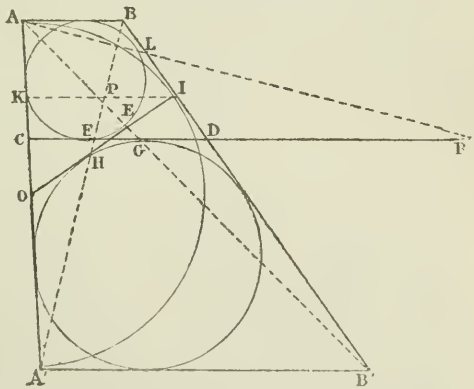
or,

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{BI}{B'I} = \frac{AB'}{A'B'};$$

par suite

$$KQ = KP;$$

et les trois droites sont concourantes



De plus $\frac{KP}{A'B'} = \frac{AK}{AA'} = \frac{BI}{BB'}$ et $\frac{PI}{A'B'} = \frac{BI}{BB'}$;

d'où, par comparaison, $KP = PI$.

(*) La figure ci-dessous est légèrement incorrecte. La droite AA′ est perpendiculaire sur les bases AB, A′B′; de plus, la circonférence inscrite dans ABCD devrait toucher BD.

Le point I décrivant la circonférence décrite sur AA, comme diamètre, le point P, milieu de IK, décrit l'ellipse ayant AA′ pour grand axe et dont le petit axe a pour valeur $\frac{AA'}{2}$.

La moitié de l'ellipse située à droite AA′ fait seule partie du lieu.

Remarque. — Les faisceaux AB′ et A′B étant homographiques, le point P d'intersection des rayons homologues, décrit une conique passant par les points A, A′.

Cette conique, n'ayant pas de points à l'infini, est une ellipse. Son grand axe est AA′, par raison de symétrie, et son petit axe $\frac{AA'}{2}$.

2° Soit R le point d'intersection des droites AL et CD.

On a $$\frac{DR}{AB} = \frac{LD}{BL};$$

d'où l'on tire $$DR = \frac{R}{r}(R + r).$$

Par suite $$CR = \frac{R}{r}(R + r) + (R + r),$$

et $$CR = \frac{(R + r)^2}{r} = \frac{\overline{AA'}^2}{4r};$$

puis $$AC.CR = \frac{\overline{AA'}^2}{2} = C^{te}.$$

Le lieu du point R est donc une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes AA′ et AB, et dont l'axe transverse a pour valeur 2AA′. La portion de l'hyperbole située à droite de AA′ et entre les parallèles AB et A′B′ fait seule partie du lieu.

Nota. — M. Foucart, élève au lycée Michelet, nous a adressé une solution analytique de cette question. Nous avons reçu aussi une solution géométrique de M. A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy.

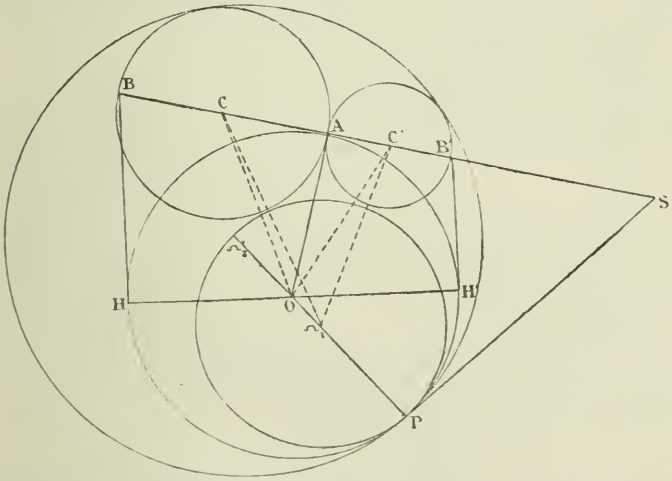
506. — *Dans ce même trapèze, on mène une tangente commune non parallèle aux bases, qui rencontre en* A *le côté* BB′. *Démontrer que les rayons des circonférences tangentes aux circonférences décrites sur* AB, AB′ *comme diamètres et au cercle décrit sur la hauteur, comme diamètre, forment une proportion harmonique avec le rayon de ce dernier cercle.* (Lauvernay.)

Soit O le centre de la circonférence décrite sur la hauteur HH′ du trapèze, comme diamètre. Tirons OA; nous savons que cette droite est perpendiculaire sur BB′, qu'elle est égale à la moitié de la hauteur du trapèze, et qu'elle se confond avec la tangente commune non parallèle aux bases. Désignant par R, r les rayons des circonférences de diamètres respectifs AB, AB′, on a $AO = \sqrt{Rr}$.

Avant de traiter le problème, nous ferons une remarque : Soit Ω_1 le centre du cercle tangent, intérieurement, à la circonférence O, et extérieurement aux circonférences BA, AB′ et P; M et N les points de contact avec ces circonférences; on sait que la droite MN passe par le centre de similitude externe S des circonférences C, C′ et que $\overline{SA}^2 = SM.SN$.

Le point S se trouve donc sur l'axe radical des circonférences O et Ω_1; la tangente commune en P passe par S; et $SP = SA$.

Soit Ω_2 le centre de la circonférence tangente aux trois



circonférences considérées et les ayant toutes à son intérieur et φ son point de contact avec O; on démontrerait de même que la tangente au point de contact φ passe par S et que $S\varphi = SA$.

Les droites SP, $S\varphi$ tangentes à la circonférence O sont

confondues, ce qui prouve que les circonférences Ω_1, Ω_2 ont leurs centres situés sur OP.

— Cette remarque faite, désignons par α, β, γ les angles respectifs $C\Omega_1C'$, $C'\Omega_1P$ et l'angle obtus $C\Omega_1P$.

Dans le triangle $C\Omega_1C'$, on a :

$$(R + r)^2 = (x + R)^2 + (x + r)^2 - 2(x + R)(x + r)\cos\alpha,$$

d'où
$$\cos\alpha = \frac{x^2 + (R + r)x - Rr}{(x + R)(x + r}, $$

x étant le rayon de la circonférence Ω_1.

De même, dans le triangle $C'O\Omega_1$, on a :

$$r^2 + 4Rr = (x + r)^2 + (2\sqrt{Rr} - x)^2 + 2(x + r)(2\sqrt{Rr} - x)\cos\beta,$$

d'où
$$\cos\beta = \frac{x^2 - (2\sqrt{Rr} - r)x}{(x + r)(x - 2\sqrt{Rr})}.$$

Enfin, dans le triangle $C\Omega_1O$, on a :

$$R^2 + 4Rr = (R + x)^2 + (2\sqrt{Rr} - x)^2 + 2(R + x)(2\sqrt{Rr} - x)\cos\gamma,$$

d'où
$$\cos\gamma = \frac{x^2 - (2\sqrt{Rr} - R)x}{(x + R)(x - 2\sqrt{Rr})}.$$

D'après la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

l'équation du problème est donc :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &[x^2 + (R + r)x - Rr]^2(x - 2\sqrt{Rr})^2 + x^2[x - (2\sqrt{Rr} - r)]^2(x + R)^2 \\ &\qquad + x^2[x - (2\sqrt{Rr} - R)]^2(x + r)^2 \\ &- 2x^2[x^2 + (R + r)x - Rr][x - (2\sqrt{Rr} - r)][x - (2\sqrt{Rr} - R)] \\ &\qquad = (x + R)^2(x + r)^2(x - 2\sqrt{Rr})^2; \end{aligned}\right.$$

équation qui se réduit à

$$[2\sqrt{Rr}(R + r) + R^2 + r^2 - Rr]x^2 - 4Rr(R + r)x = 0.$$

La racine $x = 0$ correspond au cercle de rayon, nul de centre A; l'autre racine est

$$x_1 = \frac{4Rr(R + r)}{2\sqrt{Rr}(R + r) + R^2 + r^2 - Rr},$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{Rr}} + \frac{R^2 + r^2 - Rr}{4Rr(R + r)}.$$

En employant une méthode analogue pour calculer le rayon de la circonférence Ω_2, on trouve

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - (R + r)x - Rr}{(x - R)(x - r)}, \quad \cos\beta = \frac{x^2 - (2\sqrt{Rr} + r)x}{(x - r)(x - 2\sqrt{Rr})},$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2 - (2\sqrt{Rr} + R)x}{(x - R)(x - 2\sqrt{Rr})};$$

les cosinus different des précédents par le changement de $+R$ en $-R$ et de $+r$ en $-r$; l'équation du problème s'obtient en changeant dans (1), $+R$ en $-R$ et $+r$ en $-r$, par suite on trouve pour le rayon x_2,

$$x_2 = \frac{-4Rr(R + r)}{-2\sqrt{Rr}(R + r) + R^2 + r^2 - Rr};$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2\sqrt{Rr}} - \frac{R^2 + r^2 - Rr}{4Rr(R + r)}.$$

En ajoutant (2) et (3), membre à membre, on obtient

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{2\sqrt{Rr}};$$

c'est la formule demandée.

Cette formule peut s'écrire, d'après la remarque précédente,

$$\frac{1}{P\Omega_1} + \frac{1}{P\Omega_2} = \frac{2}{PO},$$

les points $P\ C\ \Omega_1\ \Omega_2$ forment donc une division harmonique.

Nota. — Autre solution, par M. Foucart, élève au lycée Michelet et A. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy.

507. — *L'inverse du diamètre du cercle tangent à trois circonférences tangentes entre elles et possédant une tangente commune est égal à la somme algébrique des inverses des rayons de ces trois circonferences.* (Lauvernay).

Soit O''' le centre de la circonférence tangente aux trois circonférences dont les ceutres sont O, O', O'' et les rayons R, R', R''; appelons α, β, γ les angles respectifs $OO'''O''$, $O''O'''O'$, $O'O'''O$.

Dans le triangle $OO''O'''$, on a

$$(R + R'')^2 = (R + x)^2 + (R'' + x)^2 - 2(R + x)(R'' + x)\cos\alpha$$

x étant le rayon de la circonféreuce O'''.

On en tire $\cos\alpha = \dfrac{x^2 + (R + R'')x - RR''}{(R + x)(R'' + x)}$.

On trouve, de même :

$$\cos\beta = \frac{x^2 + (R' + R'')x - R'R''}{(R' + x)(R'' + x)},$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + (R + R')x - RR'}{(R + x)(R' + x)};$$

et, d'après la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

l'équation donnant le rayon x de la circonférence tangente aux trois circonférences est

$$[x^2+(R+R'')x-RR'']^2(R'+x)^2+[x^2+(R'+R'')x-R'R'']^2(R+x)^2$$
$$+[x^2+(R+R')x-RR']^2(R''+x)^2-2[x^2+(R+R'')x-RR'']$$
$$[x^2+(R'+R'')x-R'R''][x^2+(R+R')x-RR']$$
$$=(R+x)^2(R'+x)^2(R''+x)^2.$$

On trouve, après des simplifications assez longues, mais ne présentant aucune difficulté, que cette équation se réduit à :

$$[R^2R'^2 + R'^2R''^2 + R''^2R^2 - 2RR'R''(R + R' + R'')]\,x^2$$
$$- 2RR'R''(RR' + R'R'' + R''R)\,x + R^2R'^2R''^2 = 0.$$

Les trois circonférences O, O′, O″ possédant une tangente commune, on a la relation

$$\frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}} = \frac{1}{\sqrt{R''}},$$

qu'on peut écrire $\sqrt{R'R''} + \sqrt{RR'} = \sqrt{RR'}$

ou encore, après avoir chassé les radicaux,

$$R^2R'^2 + R'^2R''^2 + R''^2R^2 - 2RR'R''(R + R' + R'') = 0.$$

Le coefficient de x^2 est nul et l'équation du second degré a une racine infinie ; elle correspond à la tangente commune ; ce résultat était à prévoir.

L'autre racine est

$$x = \frac{R^2R'^2R''^2}{2RR'R''(RR' + R'R' + R''R)},$$

d'ou l'on tire $$\frac{1}{2x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}.$$

Nota. — Solution analogue par M. Barisien.

QUESTIONS PROPOSÉES

534. — Résoudre

$$(z^2 - K^2)^2 - 4K(z^3 - K)(Kz - 1) = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

535. — Soient A et B les points d'intersection de deux circonférences O et O'.

Le rayon AO coupe la circonférence O' en D; AO', coupe O en D'.

Les cinq points B, O, O', D et D' sont sur une même circonférence. *(Droz-Farny.)*

536. — Si, de l'orthocentre d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle A, la droite qui passe par leurs pieds coupe BC en son milieu.

(Droz-Farny.)

537. — Le cercle inscrit à un triangle ABC touche en M le côté BC. On prend, par rapport à la bissectrice de l'angle opposé à BC, le point M' symétrique de M; l'on mène la droite qui passe par M' et par le milieu de BC. On construit des droites analogues à celle-ci au moyen des côtés AB, AC. Démontrer que les trois droites ainsi obtenues se coupent au même point. *(Mannheim.)*

538. — Soit Δ une droite donnée; par un point fixe B on fait passer une droite mobile Δ' et l'on considère la plus courte distance des droites Δ, Δ'. Trouver le lieu décrit par le point commun à cette plus courte distance et à Δ'.

(Mannheim.)

539. — On considère le nombre 1001. A gauche et à droite de ce nombre, on écrit

1° $p - 2$ zéros,
2° le nombre 101,
3° $p - 1$ zéros,
4° l'unité.

Le nombre ainsi formé n'est jamais premier.

(G. L.)

540. — Si l'on écrit l'unité à la gauche et à la droite de $3n - 1$ zéros, le nombre ainsi obtenu n'est jamais premier.

(G. L.)

541. — Sur chacun des côtés d'un triangle, on construit, intérieurement et extérieurement aux côtés, deux carrés. Montrer que :

1° Les droites joignant un centre de carré extérieur au sommet du triangle opposé au côté de ce carré, concourent en un même point qui est l'orthocentre du triangle formé par les centres des carrés extérieurs;

2° La distance d'un centre de carré extérieur, au sommet opposé du triangle, est égale à la distance des deux autres centres des carrés extérieurs;

3° Si Σ désigne l'aire du triangle des centres des carrés extérieurs, Σ' l'aire du triangle des centres des carrés intérieurs, et S l'aire du triangle donné, on a la relation

$$\frac{\Sigma^2 - \Sigma'^2}{S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

a, b, c, désignant les longueurs des côtés du triangle.

(E.-N. Barisien.)

542. — Résoudre les deux équations

$$xy = (a - b)(x - y)$$
$$ab(x + y)^2 = (a^2 - b^2)(bx - ay).$$

(E.-N. Barisien.)

543. — Si H désigne le point de rencontre des hauteurs, G le centre de gravité de l'aire, O le centre du cercle circonscrit et I le centre du cercle inscrit d'un même triangle, on a la relation

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3(\overline{IG}^2 + 2\overline{GO})^2.$$

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1876-1-94.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA SOMMATION

DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES DÉCROISSANTES

Par M. **A. Aubry.**

L'idée de la recherche d'une telle somme paraît avoir été la conséquence des besoins de la méthode d'exhaustion, phase primitive du calcul infinitésimal. On voit, dans Euclide, l'affirmation de ce que nous avançons : il fait voir que *si de* AB (fig. 1) *on retire une partie* BH *plus grande que sa moitié; du reste* AH, *une partie* HK *plus grande que sa moitié; et ainsi de suite; on arrivera à une grandeur* AK *plus petite qu'une grandeur* C *donnée.*

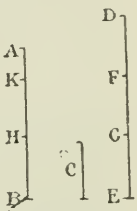


Fig. 1.

En effet, on admet comme axiome que C étant répété un certain nombre de fois en EG, GF, ... FD, la longueur ED sera supérieure à AB. Supposons un même nombre d'opérations faites sur AB comme il est dit dans l'énoncé : comme on a

$$DE > AB, \qquad DG > \frac{DE}{2}, \qquad HB > \frac{AB}{2},$$

il en résulte que GD est plus grand que AH. Si on retranche de GD, CF égal ou supérieur à sa moitié et de AH, HK plus grand que sa moitié, DF sera plus grand que AK. Et ainsi de suite : AK est ainsi supérieur à C.

Le théorème aura la même conclusion et la même démonstration si on retranche de AB sa moitié, du reste sa moitié, etc.

Nous dirions aujourd'hui : la somme des quantités $\frac{AB}{2}$, $\frac{AB}{4}$, ... tend vers la limite AB, ou même *à l'infini, cette somme est égale à* AB. Les anciens ne pouvaient se permettre un langage aussi vague dans un temps où la science venait

seulement de naître et dont, par conséquent, les principes devaient être établis sur des bases rigoureuses. Dans un prochain article relatif à la méthode d'exhaustion, nous tâcherons de préciser cette idée.

Euclide et Archimède se sont servis de ce théorème pour faire voir, entre autres choses, le premier que *les surfaces de deux cercles sont en raison des carrés construits sur leurs diamètres* et que *deux tétraèdres de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalents*, le second que *la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement égaux à la circonférence et au rayon.*

Euclide a encore donné la somme d'une progression géométrique quelconque dans les termes suivants : *Considérons un nombre quelconque de nombres continuement proportionnels, la somme, moins le dernier, est à la somme moins le premier comme le premier est au second.* En effet, si A est à B comme B à C, comme C à D, comme D à E, ... comme K à L, la somme des antécédents A, B, C, ... K est à celle des conséquents B, C, D, ... L comme A à B.

On connaît le fameux sophisme de Zénon : supposons qu'Achille marche dix fois plus vite qu'une tortue et que la tortue ait dix stades d'avance, Achille ne l'attrapera jamais; parce que, pendant qu'Achille parcourra ces dix stades, la tortue en fera un autre; pendant qu'Achille parcourra celui-ci, la tortue en fera la dixième partie d'un autre, et ainsi de suite, de sorte que la tortue aura toujours une avance sur Achille.

L'erreur évidente de la conclusion provient de ce qu'on a l'air de ne pas tenir compte de la décroissance des temps successifs. Cette difficulté est restée sans solution jusqu'à Descartes et Grégoire de Saint-Vincent, comme nous le verrons plus loin. Leibniz n'a pas dédaigné de s'en occuper : la solution complète n'est pas en effet sans présenter d'assez grandes difficultés.

Archimède a sommé une progression particulière, par un procédé qu'on peut facilement généraliser. Soient les grandeurs A, B, C. ... D, E dont chacune est quadruple de la suivante; considérons d'autres quantités de même nature

M, N, ... Q, E, qui soient respectivement le tiers de B, C, ... D, E.

La somme de M et de B donne le tiers de A; celle de N et de C, le tiers de B; ... celle de Q et de E, le tiers de D. Donc la somme des grandeurs B, C, ... D, E, M, N, ... Q, R est le tiers de la somme des grandeurs A, B, C, ... D. Or la somme des quantités M, N, ... Q est le tiers de celle des quantités B, C, ... D; donc la somme des quantités B, C, ... D, E, R est le tiers de A. et par suite, la somme des grandeurs A, B, C, ... D, E, est égale à quatre fois le tiers de A moins R, ou le tiers de E.

Il avait en vue la quadrature de la parabole.

Descartes, dans une lettre à Mersenne, qui paraît être de 1637, donne du problème de Zénon une solution ingénieuse, qui

pourrait être généralisée pour la sommation d'une progression géométrique décroissante quelconque.

Supposons que la tortue soit en B, ayant un stade d'avance sur Achille, qui est en A. Prenons BD = BA; la tortue se trouve entre les points A et D. Pendant qu'Achille fait le trajet AB, la tortue franchit l'intervalle BE; prenons EF = BE, la tortue se trouve entre B et F. Pendant qu'Achille parcourt BE, la tortue va de E en G; prenons GH = GE, la tortue se trouve entre les points E et H; la rencontre se fera donc en un certain point X situé dans l'intervalle de chacun des couples de points AD, BF, EH, ... c'est-à-dire dans les intervalles 0 — 2, 1 — 1, 2, 1, 1 — 1, 12, 1, 11 — 1, 1112, ... soit à la distance 1, 111 ... ou $\frac{11}{9}$.

A peu près en même temps, Fermat, dans sa méthode de quadrature des paraboles des divers degrés, montre, en s'appuyant sur le second théorème d'Euclide, que *la somme d'une progression géométrique décroissant à l'infini est à cette même somme moins le premier terme comme ce même premier terme est au second.* Il admet donc que la progression a un terme à l'infini qui peut être considéré comme nul.

La première solution imprimée de la sommation générale a été donnée par Torricelli (*Quadratura parabolæ*, Florence, 1644).

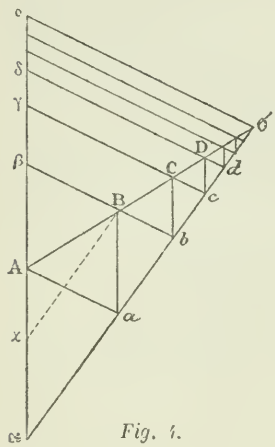


Fig. 1.

S'inspirant probablement d'une remarque de Descartes (*) (Géométrie, Leyde, 1637), il considère un angle AOα *(fig. 4)* dont il joint le sommet à un point quelconque *o* de Aα ; il tire Aα parallèle à O*o*. *a*B parallèle à Aα, B*b* parallèle à O*o* BC parallèle à Aα, ... : les longueurs Aα, *a*B, *b*C, *c*D, ... sont en progression géométrique, et leur somme est évidemment égale à α*o*. De là le moyen de sommer une progression de ce genre (**).

On en peut dire autant de la méthode de Grégoire de Saint-Vincent (*Opus geometricum, quadratura circuli et sectionum coni*,

---

(*) Soit un angle quelconque BOA *(fig. 2)*. En un point A du côté OA, on élève la perpendiculaire AB, puis la perpendiculaire BC au côté OB, puis successivement BC, CD, DE, ... : les longueurs OA, OB, OC, OD, ... sont en progression géométrique. Cette remarque sert à Descartes à insérer un nombre quelconque de moyens proportionnels entre deux grandeurs données au moyen d'un nombre égal d'équerres glissant sur les règles OA, OB, comme l'indique la figure.

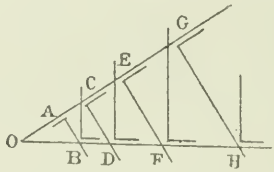


Fig. 2.

Mac Laurin (*A Treatise of Fluxions*, Edinburgh, 1742), donne un autre moyen de représenter géométriquement les progressions géométriques, moyen suffisamment indiqué par la *figure 3*, où l'on voit les trois types de progressions correspondant à des raisons > 1, $= 1$ et < 1. Il avait en vue la démonstration de la règle de la fluxion d'une puissance.

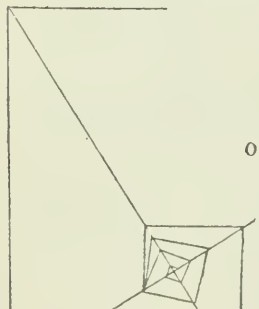


Fig. 3.

(**) Achevons le parallélogramme B*aαx*, on a en effet

$$\frac{\alpha o}{\alpha A} = \frac{\alpha O}{\alpha a} = \frac{\alpha A}{xA} \quad \text{d'où} \quad \alpha o = \frac{\alpha A}{xA}.$$

Anvers, 1647). Il considère *(fig. 5)* une suite de rectangles semblables dont les bases sont sur une même droite aO et les sommets sur deux droites BO, AO se coupant sur aO. Il fait voir que les grandeurs ab, bc, cd, ... diminuent de plus en plus, et qu'on peut prendre un assez grand nombre de ces grandeurs pour que la dernière soit plus petit qu'une quantité donnée. Il trouve alors que aO est la limite de la somme de ces grandeurs.

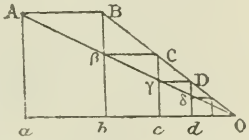


Fig. 5.

Il emploie cette théorie à l'explication du paradoxe de Zénon; à la mesure de la pyramide; à la sommation d'une progression géométrique à termes alternativement positifs et négatifs, qu'il représente par des longueurs mesurées sur une même droite, alternativement dans un sens et dans le sens opposé, et qu'il somme en la considérant comme la différence de deux progressions ordinaires; enfin à la trisection d'un arc par des bissections indéfinies (*).

On voit la première expression analytique d'une somme de progression géométrique dans la *Logarithmotechnia* (Londres, 1668) de Mercator. Il divise a par $b - c$ suivant la méthode usitée en arithmétique, et trouve

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{bc} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \text{ etc. } \textit{(in infinitum)}.$$

Plus loin, il trouve de même

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 \text{ etc. } \textit{(in infinitum)}.$$

Il avait pour but la découverte de la quadrature analytique de l'hyperbole, et de là, l'expression du logarithme d'un nombre en fonction des puissances de ce nombre.

Newton avait déjà eu cette idée quelques années auparavant.

(*) Soit l'arc AB *(fig. 6)*. On prendra le milieu C, puis le milieu D de l'arc CB, celui E de CD, celui F de ED, celui G de ED, celui H de GF, ... : on approchera ainsi de plus en plus du point cherché.

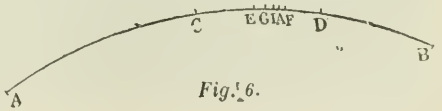
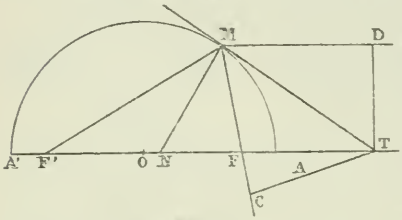


Fig. 6.

UNE CONSTRUCTION DE LA TANGENTE

A L'ELLIPSE (*)

Soit MT *une tangente à l'ellipse dont le grand axe est* AA′; F *et* F′ *sont les foyers. — Du point* T, *où cette tangente rencontre* AA′, *on abaisse* TC *perpendiculaire sur le rayon vecteur* MF, *et* TD *perpendiculaire sur la parallèle à* AA′, *menée par le point* M.



Démontrer que $\frac{MC}{MD} = \frac{c}{a}$.

$$MD = MT.\cos DMT = MT \cos MTN = MT \sin MNF.$$

(MN est la normale en M).

$$MC = MT \cos CMT = MT \sin NMF;$$

d'où $$\frac{MC}{MD} = \frac{\sin NMF}{\sin MNF} = \frac{NF}{MF} = \frac{NF'}{MF'} = \frac{NF + NF'}{MF + MF'} = \frac{c}{a}.$$

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

SUR LES CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE DIVISIBILITÉ

La plupart des traités d'arithmétique se bornent à indiquer les caractères de divisibilité qui se rapportent aux facteurs simples spécifiés dans les programmes officiels ; quelques auteurs donnent, il est vrai, des théorèmes généraux sur la divisibilité, mais ils sont souvent compliqués et la question

(*) C'est par des considérations de géométrie cinématique, des plus simples, d'ailleurs, que nous sommes arrivé à ce tracé, assez curieux, de la tangente à l'ellipse. Nous l'avions communiqué à notre camarade M. Margerie, qui nous a adressé la présente rédaction.

La construction de la tangente en un point de l'ellipse, construction que nous avions proposée est, d'après le théorème ici démontré, la suivante :

Par un point M *pris sur l'ellipse, on prend, sur le vecteur* MF *une longueur* MU = c ; *sur la semi-parallèle à* FF′, *on prend* MV = a. *Les perpendiculaires élevées aux droites* MU, MV, *aux points* U, V *se coupent sur la tangente* en M. *G. L.*

ne nous paraît pas avoir été résolue d'une manière complète; elle semble du reste présenter une sorte d'actualité, puisque le *Journal* a publié récemment (numéro de décembre 1893) un article intéressant sur ce sujet et que le *Bulletin scientifique* y revient dans son numéro de janvier 1894. D'ailleurs, ce n'est pas seulement en France que les publications scientifiques se préoccupent des caractères de divisibilité; la *Revue de la Société des Sciences* de Guatemala (numéro de novembre 1893), contient sur la question un article dont nous donnons plus loin un extrait. Nous avons donc pensé qu'il ne serait pas sans intérêt pour les lecteurs du *Journal* d'appeler leur attention sur une méthode qui, sans être nouvelle, comme nous le faisons remarquer plus loin, a du moins l'avantage d'être à la fois très générale, très pratique et uniforme.

Théorème préliminaire. — Tout nombre est multiple de la base de numération (ou d'un de ses sous-multiples) augmenté de son dernier chiffre.

En effet, d'après le principe même de la numération écrite, les différents chiffres d'un nombre représentent les unités de divers ordres contenues dans ce nombre; désignons par D l'ensemble des unités d'ordre supérieur au premier, par a la base du système de numération et par α le chiffre des unités simples, un nombre quelconque A pourra s'écrire

$$A = Da + \alpha$$

et le théorème est démontré.

Théorème général. — (*a*) Tout nombre est multiple d'un facteur de la forme $na - 1$ (ou d'un de ses sous-multiples), augmenté de la somme de la $n^{\text{ème}}$ partie de ses dizaines (*) et de ses unités.

(*b*) Tout nombre est multiple d'un facteur de la forme $na + 1$ (ou d'un de ses sous multiples) diminué de la différence entre la $n^{\text{ème}}$ partie de ses dizaines et de ses unités.

(*) Il n'y a pas d'inconvénient, pour le but que nous poursuivons, à désigner l'ensemble des unités d'ordre supérieur au premier, dans un nombre, par le mot dizaine, mais alors ce mot n'a plus tout à fait son sens ordinaire; ainsi, lorsque la base de numération est douze, les unités du second ordre sont les douzaines...

En effet, a étant toujours la base du système de numération et D l'ensemble des unités d'ordre supérieur au premier, si nous divisons D par n, nous aurons

$$D = nq + r$$

et alors le nombre A devient:

$$A = nqa + ra + \alpha$$

mais $ra + \alpha$ peut s'écrire plus simplement $r\alpha$, d'après le principe de la numération écrite et alors $r\alpha$ est ce que nous appelons les unités du nombre A, la $n^{\text{ème}}$ partie de ses unités d'ordre supérieur au premier étant q; ainsi nous pouvons écrire

$$A = nqa + r\alpha,$$

d'où nous tirons

$$A = (na - 1)q + (q + r\alpha) = (na + 1)q - (q - r\alpha)$$

et le théorème général est démontré.

Applications:

Caractères de divisibilité par un nombre quelconque écrit dans le système décimal.

Un nombre peut toujours être considéré comme écrit dans un système dont la base serait une puissance quelconque de la base primitive; donc le théorème préliminaire donne immédiatement les caractères connus de divisibilité par les différentes puissances de 2 et de 5.

Ainsi le nombre

$$15\,624$$

peut être considéré comme écrit dans le système dont la base est 100; il suffit de le supposer partagé en tranches de deux chiffres à partir de la droite :

$$1 \cdot 56 \cdot 24$$

et alors le nombre sera divisible par 2^2 ou 4, si la dernière tranche à droite 24 est elle-même divisible par 4.

Maintenant, si nous appliquons le théorème général, nous allons obtenir les caractères de divisibilité par tous les nombres premiers, quels qu'ils soient. En effet, ces nombres premiers se terminent tous par 1 ou 9, et alors ils rentrent dans la forme $na \pm 1$; ou encore par 3 ou 7, et alors on

pourra les remplacer par un de leurs multiples de la forme $na \pm 1$, comme nous allons le montrer par quelques exemples.

I. — *Divisibilité par* 9 *et* 11.

Le théorème général démontré plus haut nous donne les caractères de divisibilité connus :

(a) Tout nombre est un multiple de 9 augmenté de la somme de tous ses chiffres.

(b) Tout nombre est un multiple de 11 augmenté de la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair.

En effet,
$$9 = 10 - 1$$
$$11 = 10 + 1;$$
il nous faut donc faire ici $n = 1$, et nous pourrons écrire, par exemple,
$$5427 = m.9 + 542 + 7$$
$$542 = m.9 + 54 + 2$$
$$54 = m.9 + 5 + 4;$$
d'où, par addition :
$$5427 = m.9 + 7 + 2 + 4 + 5.$$
De même :
$$74613 = m.11 - 7461 + 3$$
$$7461 = m.11 - 746 + 1$$
$$746 = m.11 - 74 + 6$$
$$74 = m.11 - 7 + 4$$
d'où on tire
$$74613 = m.11 + 3 - 1 + 6 - 4 + 7$$

C. Q. F. D.

II. — *Divisibilité par* 19 *et par* 7 (*).

(*a*) Tout nombre est un multiple de 19 augmenté de la somme de la moitié de ses dizaines et de ses unités.

(*b*) Tout nombre est un multiple de 7 diminué de la différence entre la moitié de ses dizaines et ses unités.

(*) Ces caractères de divisibilité par 7 et 19, — les plus simples que nous connaissions, — ne sont pas nouveaux, nous les avons lus autrefois dans un numéro du *Journal de l'instruction publique*, mais il nous serait impossible de préciser en quelle année.

En effet,
$$19 = 20 - 1$$
$$3 \times 7 = 20 - 1$$
donc, pour appliquer le théorème général, nous devons faire $n = 2$, ce qui nous donnera les résultats que nous venons d'énoncer

Exemple:

$$\begin{aligned}
114323 &= 5716 \times 20 + 3 = \text{m}.19 + 5716 + 3 \\
5719 &= 285 \times 20 + 19 = \text{m}.19 + 285 \\
285 &= 14 \times 20 + 5 = \text{m}.19 + 14 + 5 = \text{m}.19.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
233576 &= 11678 \times 20 + 16 = \text{m}.21 - 11678 + 16 \\
11662 &= 583 \times 20 + 2 = \text{m}.21 - 583 + 2 \\
581 &= 29 \times 20 + 1 = \text{m}.21 - 29 + 1 = \text{m}.7
\end{aligned}$$

III. — *Divisibilité par* 29 *et* 31.

(*a*) Tout nombre est un multiple de 29 augmenté de la somme du tiers de ses dizaines et de ses unités.

(*b*) Tout nombre est un multiple de 31 diminué de la différence entre le tiers de ses dizaines et ses unités.

En effet, puisque
$$29 = 30 - 1$$
$$31 = 30 + 1$$
il nous suffira de faire $n = 3$ dans l'application du théorème général pour obtenir les caractères de divisibilité que nous venons d'énoncer.

En continuant de même, on trouvera les caractères de divisibilité par 39 et 41, par 49 et 51, etc... Nous allons en particulier nous arrêter aux nombres 39 et 51 qui ne sont pas premiers, mais qui nous serviront à trouver les caractères de divisibilité par 13 et 17.

IV. — *Divisibilité par* 13.

Tout nombre est un multiple de 13 augmenté de la somme du quart de ses dizaines et de ses unités.

En effet : $3 \times 13 = 40 - 1$

c'est-à-dire un nombre de la forme $na - 1$, et comme $n = 4$, nous en déduisons le caractère énoncé.

Exemple :

$$\begin{aligned} 355966 &= 8899 \times 40 + 6 = m.39 + 8899 + 6 \\ 8905 &= 222 \times 40 + 25 = m.39 + 222 + 25 \\ 247 &= 6 \times 40 + 7 = m.39 + 6 + 7 = m.13 \end{aligned}$$

V. — *Divisibilité par* 17.

Tout nombre est un multiple de 17 diminué de la différence entre la cinquième partie de ses dizaines et ses unités.

En effet, nous avons

$$3 \times 17 = 50 + 1,$$

c'est-à-dire un nombre de la forme $na + 1$. En faisant $n = 5$, on voit que le théorème général nous donne bien le caractère de divisibilité énoncé.

Exemple :

$$\begin{aligned} 1\,812\,404 &= 36248 \times 50 + 4 = m.51 - 36248 + 4 \\ 36\,244 &= 724 \times 50 + 44 = m.51 - 724 + 44 \\ 680 &= 13 \times 50 + 30 = m.51 - 13 + 30 \\ &= m.17. \end{aligned}$$

Nous trouverons ainsi d'une manière très simple et très pratique les caractères de divisibilité par tous les nombres premiers, quels qu'ils soient; cependant, il est bon d'observer que si un nombre premier se termine par un des chiffres 3 ou 7, il n'est pas indifférent de le remplacer par un quelconque de ses multiples rentrant dans la forme

$$na \pm 1.$$

Il est évident, en effet, que certains de ces multiples pourront être beaucoup plus avantageux que d'autres, comme nous allons en donner un exemple.

VI. — *Divisibilité par* 37.

Imaginons un nombre partagé en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Tout nombre est un multiple de 37 augmenté de la somme de ses tranches de trois chiffres, à partir de la droite.

En effet, $37 \times 27 = 1000 - 1.$

Si donc nous prenons un nombre quelconque, 5 433 827, par exemple, nous écrirons :

$$5\,433\,827 = 5\,433 \times 1\,000 + 827 = m.37 + 5\,433 + 827$$
$$5\,433 = 5 \times 1\,000 + 433 = m.37 + 5 + 433$$
donc $$5\,433\,827 = m.37 + 827 + 433 + 5 \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans la pratique, ce caractère de divisibilité est d'une application rapide. Soient donnés, par exemple, les nombres

648 148 203 et 65 913 647

nous ferons les deux sommes

$$\begin{array}{rr} 203 & 647 \\ 148 & 913 \\ \underline{648} & \underline{65} \\ 999 & 1\,625 = 999 + 626 \end{array}$$

et nous reconnaîtrons immédiatement que le premier nombre est un multiple de 37 et que le second divisé par 37 donne le même reste que 626 divisé par 37.

Or $111 = 3 \times 37$;
donc $555 = m.37$;
par suite $626 = 555 + 71$
et $65\,913\,647 = m.37 + 34$.

Remarque. — On pourra opérer d'une manière analogue en partageant un nombre en tranches de p chiffres toutes les fois que dans la forme générale $na \pm 1$, on prendra $n = a^{p-1}$.

Les exemples que nous venons de donner suffisent pour faire voir la grande généralité du théorème énoncé plus haut; mais, pour montrer tout le parti qu'on peut tirer de ce théorème, nous allons l'appliquer à la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, ou plutôt à la question plus générale : « *Reconnaître si un nombre est premier ou non.* »

Pour résoudre cette question, nous faisons usage du tableau ci-joint qui contient, outre les nombres premiers jusqu'à 101 (*), quelques-uns de leurs multiples dont nous aurons à faire usage dans ce qui va suivre.

Problème. — *Reconnaître si un nombre est premier ou non.*

Nous savons que pour faire cette recherche, il faut essayer

(*) On peut évidemment prolonger ce tableau à volonté.

la division du nombre donné par chacun des facteurs premiers inférieurs à sa racine carrée; or cette racine se trouve *à priori*, au moins approximativement, en sorte qu'il est facile d'avoir une limite supérieure des facteurs à essayer.

(a) Soit donné le nombre 2501.

Nous avons évidemment :

$$\sqrt{2501} < 51.$$

Nous n'aurons donc à appliquer les caractères de divisibilité qu'aux facteurs premiers inférieurs à 51.

Tableau des nombres premiers jusqu'à 101 *et des multiples auxquels on doit appliquer les caractères de divisibilité.*

1 2 3 5 7				
11	13	17	19	$37 \times 27 = 999$
$3 \times 7 = 21$	23	..	29	$43 \times 7 = 301$
31	..	37	$39 = 3 \times 13$	$47 \times 3 = 141$
41	43	47	$49 = 7^2$	$53 \times 17 = 901$
$3 \times 17 = 51$	53	..	59	$67 \times 3 = 201$
61	..	67	$69 = 3 \times 23$	$73 \times 3 = 219$
71	73	..	79	$83 \times 3 = 249$
$3^4 = 81$	83	..	89	$97 \times 3 = 291$
91	..	97	..	
101				

Nous disposerons les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|lll}
2501 & \frac{1}{2} & 125 \pm 1 & \begin{cases} 126 = 19 \times 6 + 12 \\ 124 = 21 \times 5 + 19 \end{cases} \\
 & \frac{1}{3} & 83 \pm 11 & \begin{cases} 94 = 29 \times 3 + 7 \\ 72 = 31 \times 2 + 10 \end{cases} \\
 & \frac{1}{4} & 62 \pm 21 & \begin{cases} 83 = 39 \times 2 + 5 \\ 4 = 41 \quad + 0 \end{cases} \\
 & \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

On voit que nous avons pris successivement la moitié, le tiers, le quart des dizaines et, en appliquant le théorème général sur la divisibilité, nous avons reconnu que 2501 est un mul-

tiple de 19 plus 12, un multiple de 21 (ou de 7) plus 19, un multiple de 29 plus 7, ... etc. ... et qu'enfin il est divisible par 41; il n'est donc pas premier, et nous pouvons écrire

$$2501 = 62 \times 40 + 21 = 62 \times 41 - 62 + 21$$

c'est-à-dire $$2501 = 61 \times 41.$$

Ainsi le nombre se trouve décomposé en facteurs premiers.

(*b*) Soit encore donné le nombre 3907.

Nous voyons immédiatement que

$$\sqrt{3907} < 65.$$

Nous devrons donc essayer les caractères de divisibilité pour tous les facteurs premiers inférieurs à 65; cela nous donnera les résultats suivants :

3907	$\frac{1}{2}$	195 ± 7	$202 = 19 \times 10$	$+ 12$
			$188 = 21 \times 8$	$+ 20$
	$\frac{1}{3}$	130 ± 7	$137 = 29 \times 4$	$+ 21$
			$123 = 31 \times 3$	$+ 30$
	$\frac{1}{4}$	97 ± 27	$124 = 39 \times 3$	$+ 7$
			$70 = 41 \times 1$	$+ 29$
	$\frac{1}{5}$	78 ± 7	$85 = 49$	$+ 36$
			$71 = 51$	$+ 20$
	$\frac{1}{6}$	65 ± 7	$72 = 69$	$+ 3$
			. . . . .	
	$\frac{1}{1000}$	$3 + 907$	$910 = 888$	$+ 22$
	$\frac{1}{30}$	$13 - 7$	$m.43$	$+ 6$
	$\frac{1}{14}$	$27 - 127$	$m.47$	$- 120$
	$\frac{1}{90}$	$40 - 307$	$m.53$	$- 267$

et, comme nous avons obtenu un reste différent de zéro pour tous les facteurs premiers essayés, il faut en conclure que 3907 est un nombre premier.

Dans la pratique, on peut évidemment se dispenser d'écrire tous les calculs; il sera notamment inutile de connaître les

restes, il suffira de constater que la division ne se fait pas exactement.

Remarquons qu'au lieu de suivre dans nos essais l'ordre naturel des facteurs premiers, nous avons suivi l'ordre que présentent les nombres inscrits dans les première et quatrième colonnes verticales du tableau ci-joint (*); les nombres 21, 39, 51 et 69 ne sont pas premiers, mais ils donnent les caractères de divisibilité par 7, 13, 17 et 23 — nous aurions pu nous dispenser de considérer 49 qui fait double emploi avec 21, — enfin nous avons dû essayer aussi quelques-uns des facteurs premiers inscrits dans les seconde et troisième colonnes verticales de notre tableau, nous les avons remplacés par leurs multiples indiqués hors cadre à côté du tableau.

Outre la grande symétrie que présente l'application de cette méthode, les calculs auxquels elle donne lieu sont notablement plus courts que ceux qu'il faudrait faire pour vérifier par une série de divisions que 3907 n'admet aucun des facteurs premiers inférieurs à sa racine carrée.

Il est inutile d'insister davantage sur tous les services qu'on peut tirer des caractères de divisibilité qui précèdent. ils sont remarquables, non seulement par leur grande généralité, mais aussi, et surtout, par la grande uniformité qu'ils présentent et l'extrême facilité avec laquelle on les retient.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. B. Sollertinsky :

« ... *La question 7* (1882, p. 23) est complètement résolue dans l'article de M. *Neuberg* « Sur le point de Steiner » 58 (*J. S.* 1886, pp. 75-76). Voir aussi *E. Vigarié* « Sur quelques cercles remarquables » (*J. E.* 1887, p. 147, note).

(*) Nous ne parlons pas des facteurs premiers contenus dans la première ligne horizontale du tableau, parce que l'on constate pour ainsi dire à première vue leur présence dans un nombre, à l'exception du facteur 7 qui revient plus loin lorsque l'on considère 21.

Les questions 240, 241 (1887, p. 23) sont aussi résolues dans l'article de M. *Neuberg* « Géométrie et mécanique » (*J. E.*, 1888, p. 50, p. 75).

La question 421 (1891, p. 288) est résolue (1893, p. 39).

La question 422 (1891, p. 288) est aussi résolue (1892, p. 280).

Quant à la question 365 (*), on peut se reporter à la note de la Rédaction (*J. E.*, 1891, p. 21), d'où l'on voit que cette question *a été résolue* et généralisée. »

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard :

« Je me suis reporté ces jours-ci à une question déjà ancienne et sur laquelle je vous ai donné autrefois quelques résultats, la question 316 (*J. S.*, résolue pp. 211-215. [1892]).

Parmi de nouvelles propriétés des lignes considérées *(loc. cit.)*, je vous signalerai celles-ci :

1° Les triangles ABC, A'B'C' sont homologiques.

2° Le centre d'homologie est le point L.

3° L'axe d'homologie passe par G'.

4° Il est perpendiculaire à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui se projette suivant SG et dont l'autre extrémité est sur MH'.

5° Les points de rencontre de l'axe d'homologie avec les côtés du triangle A'B'C' étant désignés par A_3, B_3, C_3. les différences entre les abscisses des points A_3, B_3, C_3 sont égales aux différences entre les ordonnées des points A, B, C.

6° A''B''C'' étant les secondes intersections des normales AM, BM, CM, on a $y_G'' \times y_L'' = p^2$ en valeur absolue.

7° Au point L, les deux hyperboles A, A' ont pour tangentes LG', LG.

Etc, etc.

A propos des barycentres des triangles ABC, A'B'C', tous deux sur SX, je ne puis découvrir l'auteur de la remarque au sujet du barycentre du triangle ABC. Gerono (*N. A.*, 1843, 181) a signalé l'équation aux ordonnées des points A, B, C, mais il n'a pas — ce me semble — fait de remarque au sujet de leur somme qui est nulle. Dans la suite, on a essayé diverses

(*) Voir la note *Journal*, p. 24.

démonstrations de cette propriété (*N.-A.* 1871. 411, *Mathésis.* 1883, 32, *etc.*); toujours sans indication d'origine.

Sur l'hyperbole équilatère A et la circonférence ABC, on peut remarquer cette propriété connue, je crois, depuis longtemps : le quatrième point d'intersection des deux courbes est diamétralement opposé, sur l'hyperbole, à l'orthocentre du triangle des trois autres. »

Extrait d'une lettre de M. Tesch :

M'est-il permis de vous faire une très légère observation au sujet de votre article : *Sur certaines généralisations de l'équation de Pell*, qui a paru dans votre journal?

Dans le paragraphe 5 vous signalez une solution de l'équation $x^2 = y^2 + pz^2$, pour tout nombre p entier.

Or, les équations dont vous parlez dans le paragraphe 7, c'est-à-dire

$$z^2 = x^2 \mp xy + y^2$$

rentrent dans ce type. En effet, on peut écrire

$$z^2 = \left(\frac{x}{2} \mp y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2;$$

c'est le cas où l'on suppose $p = 3$.

On peut d'ailleurs y attacher une signification géométrique en observant que z est le troisième côté d'un triangle, dont deux autres côtés sont x et y, l'angle qu'ils contiennent étant, suivant le signe du terme en xy, de 60 ou de 120 degrés.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

(*Suite*, voir p. 17.)

---

312. — *Soit* M *un point quelconque du plan d'un triangle,* $A_1B_1C_1$ *le triangle pédal de* M, *le cercle circonscrit à* $A_1B_1C_1$, *coupe chacun des côtés de* ABC, *en un second point:* A_2, B_2, C_2. *Les droites* AA_2, BB_2, CC_2 *sont concourantes.*

Le cercle $\Sigma a^2\beta\gamma - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)\Sigma\alpha = 0$,
passant par A_1, B_1, C_1, on a (α_1, β_1, γ_1, coord. de M)

$$a^2\beta_1\gamma_1 - (\beta_1 + \gamma_1)(\mu\beta_1 + \nu\gamma_1) = 0,$$
$$b^2\alpha_1\gamma_1 - (\alpha_1 + \gamma_1)(\lambda\alpha_1 + \nu\gamma_1) = 0,$$
$$c^2\alpha_1\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) = 0.$$

d'où
$$\lambda = \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{b^2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\gamma_1}} + \frac{c^2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}} - \frac{a^2}{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1}}\right);$$

et deux formules analogues pour μ, ν. Posons, pour abréger :

$$\lambda = \frac{K_a}{2\alpha_1} \qquad \mu = \frac{K_b}{2\beta_1} \qquad \nu = \frac{K_c}{2\gamma_1}.$$

L'équation de AA_2 est $\beta K_b = \gamma K_c$.

Les droites telles que AA_2 concourent donc au point

$$\alpha K_a = \beta K_b = \gamma K_c.$$

313. — *Soit* M *un point.* A′B′C′ *son triangle polaire, de* A, B, C, *on abaisse respectivement les perpendiculaires* AA_1 *sur* B′C′, BB_1 *sur* A′C′, CC_1 *sur* A′B′. *Lieu géométrique du point* M, *tel que les droites* $A'A_1$ $B'B_1$ $C'C_1$ *soient concourantes ?*

Ces droites sont concourantes en même temps que AA′, BB′, CC′, c'est-à-dire quand M sera un point de la cubique des inverses relative à l'anticomplémentaire de l'orthocentre.

314. — *Sur les côtés d'un triangle* ABC, *on porte les longueurs* $AB_1 = AC_1 = BA_2 = BC_2 = CA_3 = CB_3 = \lambda$. *Déterminer* λ *de manière que les trois droites* B_1C_1, A_2C_2, A_3B_3 *soient concourantes.*

En coordonnées barycentriques, les équations de ces droites sont

$$\alpha\lambda + \beta(\lambda - c) + \gamma(\lambda - b) = 0$$
$$\alpha(\lambda - c) + \beta\lambda + \gamma(\lambda - a) = 0$$
$$\alpha(\lambda - b) + \beta(\lambda - a) + \gamma\lambda = 0:$$

d'où, pour la condition de leur concours

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda - c & \lambda - b \\ \lambda - c & \lambda & \lambda - a \\ \lambda - b & \lambda - a & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

et, tous calculs faits :

$$\lambda = \frac{2pr}{4R + r}.$$

On en déduit alors pour les coordonnées normales du point de concours :

$$x \operatorname{tg}\frac{A}{2} = y \operatorname{tg}\frac{B}{2} = z \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Ce point est l'inverse de J, il est situé sur KI ; on peut remarquer que J_2, étant le complémentaire de I′, est situé sur GI′.

315. — *Un point* M *parcourt la circonférence circonscrite au triangle de référence, l'hyperbole équilatère transformée par points*

inverses de OM *a pour centre* Q; *soit* M_1 *une seconde position de* M, Q_1 *le centre correspondant. Démontrer que l'angle* QO_9Q_1 *est le double de l'angle* MOM_1 (*).

Ce théorème montre que deux points diamétralement opposés au cercle des neuf points sont les centres de deux hyperboles équilatères inverses de deux droites rectangulaires passant par O.

Ce théorème permet encore, la droite OM étant tracée, de trouver géométriquement et immédiatement le centre de l'hyperbole équilatère qui est la transformée par points inverses de OM. Il n'y a pas d'ambiguité si l'on remarque que OM tournant autour de O, dans un sens, celui des aiguilles d'une montre, par exemple, O_9Q tourne autour de O_9 en sens inverse.

316. — *Dans le plan d'un triangle, on trace une droite, à la distance* d *du centre du cercle circonscrit. Démontrer que la conique transformée par points inverses de cette droite est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'on a*

$$d > R \qquad d < R \qquad d = R.$$

L'angle des asymptotes de cette conique est donné par la formule :

$$\cos V = \frac{d}{R}.$$

Il suffit de partir des formules générales, en remarquant que si

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$

est l'équation de la droite considérée

$$d^2 = \frac{R^2 \sum \lambda \cos A^2}{\sum \lambda^2 - \sum 2\mu\nu \cos A}$$

V, angle des asymptotes, est la moitié de l'angle sous lequel on voit de O la corde interceptée par le cercle circonscrit sur la droite considérée.

BIBLIOGRAPHIE

Archives des lycées, proviseurs et censeurs, 1er mai 1802-1er juillet 1893, par *Ch. Fierville*, censeur des études au lycée Charlemagne, membre honoraire du Comité des travaux historiques. — Un fort volume grand in-8° de LVXXV-526 pages. Prix : 40 francs.

Cet ouvrage est un répertoire sans précédent, un recueil de documents que l'on chercherait vainement ailleurs, et qui est le résultat de longues et patientes recherches. Il est indispensable à tous ceux, qui à un titre

(*) Je n'ai de ce théorème, qui me semble curieux, qu'une démonstration analytique très pénible; il y aurait lieu d'en chercher une autre plus simple, ou géométrique.

ou à un autre, s'intéressent à l'administration des lycées et à l'histoire de l'Enseignement secondaire ; il a sa place marquée dans toutes les bibliothèques des villes, des académies et des lycées.

Il se divise en quatre parties précédées d'une introduction historique.

Introduction. — Après un aperçu rapide sur la situation des anciens collèges réglementés par l'édit de 1763, disparus à l'époque de la Révolution, — et sur les Écoles centrales, dont la durée fut si éphémère, l'auteur traite la question des lycées, institués par la loi générale sur l'Instruction publique du 1er mai 1802, puis de leur organisation définitive par le décret-loi du 10 mai 1806, qui créa l'Université. Il les suit dans toutes les péripéties de leur existence sous le premier empire, la Restauration, le gouvernement de juillet, le second empire et la République.

Des renseignements très curieux, avec tableaux comparatifs, empruntés à la statistique, de 1789 à 1892, permettent de constater la marche constamment progressive de l'esprit public en faveur de l'Enseignement secondaire en général et des lycées en particulier.

A l'origine, il n'y en avait que 35 avec une population de 9.000 élèves, soit une moyenne de 257 par lycée : en 1893, il y en a 108 (plus quatre aux colonies), avec une population de 53.000 élèves, soit une moyenne de 490 par lycée. Le nombre des lycées a triplé ; le nombre de leurs élèves a presque sextuplé.

Ces détails historiques, qui portent avec eux leur enseignement, sont suivis d'observations générales sur les origines et les fins de carrière des administrateurs qui sont du plus vif intérêt.

1re partie. — Bibliographie des lycées, par ordre alphabétique.

2e partie. — Liste chronologique de tous les administrateurs des lycées, année par année, depuis 1802 jusqu'au 1er avril 1893, avec l'indication de leur première fonction dans l'administration.

3e partie. — Fonctionnaires de l'administration de chaque lycée (proviseurs et censeurs), rangés parallèlement en face l'un de l'autre, avec la date du commencement et de la fin de leurs fonctions. Cette double liste est précédée de l'historique sommaire du lycée, avec l'indication de sa population scolaire à des époques déterminées.

Les lycées sont placés dans l'ordre suivant :

1° Anciens lycées des villes qui ne font plus partie de la France, tels que Bonn, Bruges, Bruxelles, Colmar, Florence, etc., par ordre alphabétique ;

2° Lycées actuels de Paris, de la Seine et de Seine-et-Oise, par ordre alphabétique ;

3° Lycées actuels des départements et des colonies, également par ordre alphabétique.

4e partie. — Notices individuelles de tous les administrateurs des lycées. — Ce dictionnaire biographique contient près de 1.200 noms et forme plus de la moitié du volume.

Des suppléments destinés à tenir ces *Archives* à jour paraîtront à des époques déterminées.

BACCALAURÉATS

Académie de Montpellier.

1re série. — I. G étant le point de rencontre des médianes du triangle ABC, démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3(\overline{GA}^2 + GB^2 + \overline{GC}^2).$$

II. AB est une barre homogène pesante. L'extrémité A est fixe. A l'extrémité B est attaché un fil qui passe dans une poulie fixe et infiniment petite C, et supporte un poids égal à la moitié de celui de la barre. Le point C est sur la verticale du point A, au-dessus de ce point, et à une distance égale à AB. Déterminer les positions dans lesquelles la barre est en équilibre.

2e série. — Calculer les côtés BC et CD, d'un trapèze ABCD rectangle en B et en C, connaissant sa base $AB = a$, la somme b de la base CD et de la diagonale BD et sachant que le volume engendré par le trapèze tournant autour de AB est égal au volume d'un cône de hauteur b et dont la base a un rayon donné R.

Distinguer les solutions dans lesquelles l'angle DAB est obtus de celles pour lesquelles il est aigu.

3e série. — Calculer les côtés et les angles d'un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la différence m^2 entre les carrés des deux autres côtés.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. Étant donné un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, déterminer un point P sur AB, tel que l'on ait $AP + m \cdot MP = a$, a étant une ligne donnée, m un nombre positif donné. — Discuter.

II. Calculer le rapport a/b sachant que le moyen arithmétique inséré entre a et b est double du moyen géométrique inséré entre les mêmes nombres.

Académie de Nancy.

I. Expliquer la détermination du rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres.

II. On donne l'équation

$$x^2 - 2(m - 1)x + 4m - 7 = 0$$

où m désigne une indéterminée.

1° Pour quelles valeurs de m les racines sont-elles réelles?

2° Quels sont les signes des racines pour ces valeurs de m ?

QUESTION 408

Solution par M. A. Droz-Farny.

A_1, A_2, A_3, A_4 *étant quatre points pris sur une sphère, le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} o & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & o & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & o & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & o \end{vmatrix}$$

n'est jamais positif. (Nota. *Le symbole* d_{ik} *représente le carré de la distance des points* A_i *et* A_k.) (L. Bénezech.)

En représentant par R et V, respectivement, le rayon de la sphère et le volume du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, on sait que l'on a

$$576V^2R^2 = -D \qquad \text{(Dostor, } \textit{Déterminants}\text{, p. 277).}$$

Le terme de gauche étant positif, D doit être nécessairement négatif.

Si $V = o$, c'est-à-dire si les quatre points sont sur un grand cercle, alors $D = o$. On déduirait aisément de la relation obtenue le théorème de Ptolémée.

QUESTION 248

Solution par M. A. Droz-Farny.

Un segment de droite variable se déplace entre deux axes fixes de telle façon que sa projection orthogonale sur l'un des deux axes reste constante.

1° Quel est le lieu du milieu de ce segment de droite?

2° Quelle est l'enveloppe de ce segment de droite?

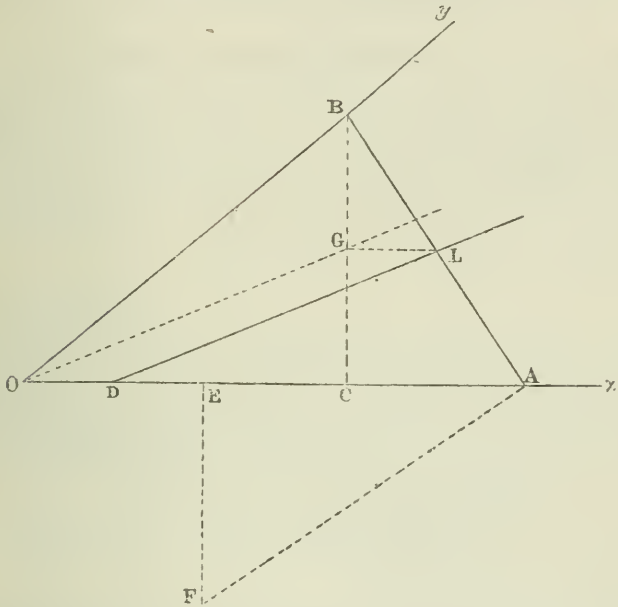
(D'Ocagne.)

Soient Ox, Oy les axes, AB une des positions de la droite, $CA = a$ sa projection sur Ox, $OD = DE = \frac{a}{2}$, enfin G et L sont les points n ilieux de la projetante BC et de la droite BA.

On a $GL = \frac{a}{2}$; la figure GODL est un parallélogramme.

La médiane GO étant fixe, il en résulte que le lieu de L est une parallèle fixe à GO.

La perpendiculaire élevée en A sur AB coupe la perpendi-



culaire FE sur OX en F. De la similitude des triangles EFA et BCA on déduit

$$\frac{EF}{EA} = \frac{CA}{CB} = \frac{a}{OC.\operatorname{tg} O},$$

et comme $EA = OC$, $EF = a.\operatorname{cotg} O$.

L'enveloppe cherchée est donc une parabole ayant F comme foyer et Ox comme tangente au sommet.

Remarque. — On aurait aussi pu obtenir de la manière suivante la nature de l'enveloppe. La droite mobile, coupant les quatre droites fixes Ox, Oy, DL et D_∞, suivant un rapport harmonique, enveloppe une section conique ayant les quatre droites fixes comme tangentes. Une des tangentes étant à l'infini, la courbe est une parabole.

QUESTIONS PROPOSEES

544. — Une barre coudée rigide BAC suspendue par le point A porte en son extrémité B un poids fixe K et en son extrémité C un poids variable P. Dans sa position initiale, c'est-à-dire lorsque $P = o$, un index invariablement lié au système BAC se dirige suivant la droite AI_0. Lorsqu'on donne à P une certaine valeur, il vient en AI. On demande de déterminer l'angle que AI fait avec AI_0.

(Cet énoncé renferme la théorie du *pèse-lettres.*)

(M. d'Ocagne.)

545. — Les droites qui joignent le centre de gravité G d'un tétraèdre aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4 interceptent sur les sphères déterminées par les points (G, A_2, A_3, A_4), (G, A_3, A_4, A_1), $G, A_4, A_1, A_2)$, (G, A_1, A_2, A_3), des segments l_1, l_2, l_3, l_4 qui vérifient la relation

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 + m_4 l_4 = \sum d_{12},$$

m_1, m_2, m_3, m_4 désignant les longueurs des médianes du tétraèdre, droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.

Lorsqu'on remplace le centre de gravité par le centre I de la sphère inscrite, la relation analogue est :

$$\left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1 l_1 IA_1\right) = 3\sum s_1 s_2 d_{12},$$

s_1, s_2, s_3, s_4 désignant les aires des faces du tétraèdre.

(L. Bénézech.)

546. — Résoudre

$$(x + a)(x + b)[2x^3 + (a + b)(a + b - x)^2]$$
$$= 2(a + b)x[a^2(x + a) + b^2(x + b)].$$

(Sollertinsky.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4064-2 94.

NOTE D'ARITHMÉTIQUE

SUR LES CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE DIVISIBILITÉ

(*Suite*, voir page 54.)

Après avoir établi, comme nous l'avons fait dans le précédent article, les différents caractères de divisibilité, nous devons indiquer comment ils s'appliquent à tous les systèmes de numération.

VIII. — *Caractères de divisibilité dans le système sexagésimal.*

On sait que dans la mesure du temps, comme dans la mesure des arcs, on fait encore usage du système sexagésimal. Les caractères de divisibilité qui précèdent s'appliquent aux nombres écrits dans ce système, sans qu'il soit nécessaire de les ramener au système décimal.

En effet, dans la mesure des arcs, par exemple,

$60'''$ (unités du 1er ordre) valent $1''$,
$60''$ (unités du 2e ordre) valent $1'$,
$60'$ (unités du 3e ordre) valent 1°;

les degrés représentent alors les unités du quatrième ordre.

Cela posé, je dis que tout nombre exprimé en degrés, minutes et secondes est multiple de 60 et de tous ses diviseurs.

En effet, nous pouvons écrire :

$$75^\circ\, 53'\, 47'' = 60\,(1^\circ\, 15'\, 53''\, 47''') = \text{m}.60$$

C. Q. F. D.

IX. — *Divisibilité par* 59 *et* 61.

a) Tout nombre *sexagésimal* est multiple de 59 augmenté de la somme de ses unités de divers ordres :

En effet,

$$\begin{array}{rcl} 35^\circ\, 29'\, 54'' = 59\,(35'\, 29''\, 54''') & + & 35'\, 29''\, 54''' \\ 35'\, 29'' = 59\,(35''\, 29''') & + & 35''\, 29''' \\ 35''' = 59\,(35''') & + & 35''' \\ \hline \text{d'où}\quad 35^\circ\, 29'\, 54'' = \text{m}.59 + (54 + 29 + 35) & & \end{array}$$

C. Q. F. D.

b) Tout nombre *sexagésimal* est multiple de 61 diminué de l'excès de la somme de ses unités d'ordre pair sur la somme de ses unités d'ordre impair.

En effet,

$$28^\circ\, 19'\, 52'' = 61\,(28'\, 19''\, 52''') - 28'\, 19''\, 52'''$$
$$28'\, 19'' = 61\,(28''\, 19''') \quad - \quad 28''\, 19'''$$
$$28'' = 61\,(28''') \quad - \quad 28'''$$

d'où $28^\circ\, 19'\, 52'' = \text{m.}\,61 - (52 - 19 + 28)$

X. — *Divisibilité par* 7, 11 *et* 17.

a) Tout nombre *sexagésimal* est multiple de 7 ou de 17 augmenté de la somme obtenue en ajoutant ses unités du deuxième ordre, la moitié de ses unités du troisième et le quart de ses unités du quatrième.

En effet, on a $7 \times 17 = 119$,

donc $17^\circ\, 23'\, 21'' = 119\,(8'\, 41'') + 8'\, 41'' + 81''$

$8'\, 41'' = 119\,(4'') \quad + \quad 4'' + 41''$

d'où $17^\circ\, 23'\, 21'' = \text{m.}\,119 + (81 + 41 + 4) = \text{m.}\,7$,

de même $89^\circ\, 18'\, 7'' = 119\,(44'\, 39'') + 44'\, 39'' + 7''$

$44'\, 39'' = 119\,(22'') \quad + \quad 22'' + 39''$

d'où $89^\circ\, 18'\, 7'' = \text{m.}\,119 + (7 + 39 + 22) = \text{m.}\,17$.

C. Q. F. D.

b) Tout nombre *sexagésimal* est multiple de 11 augmenté de ses unités du deuxième ordre et du quart de ses unités du quatrième, mais diminué de la moitié de ses unités du troisième ordre.

En effet, on a $11^2 = 121$,

donc $79^\circ\, 25'\, 12'' = 121\,(39'\, 42'') - 39'\, 42'' + 72''$

$39'\, 42'' = 121\,(19'') \quad - 19'' \quad + 102''$

d'où $79^\circ\, 25'\, 12'' = \text{m.}\,11 + (72 - 102 + 19) = \text{m.}\,11$.

C. Q. F. D.

On trouverait de même des caractères de divisibilité

par 179 et 181 ou $3 \times 60 \mp 1$

par 239 et 241 ou $4 \times 60 \mp 1$

par 299 et 301 ou $5 \times 60 \mp 1$

etc... notamment $299 = 13 \times 23$ donnerait les caractères de divisibilité par 13 et 23, 301 donnerait de même les caractères correspondant à 43, etc...

XI. — *Nombres complexes.*

Lorsqu'on emploie simultanément la base 60 et la base 10 pour exprimer un nombre, on peut encore appliquer les caractères précédents sans qu'il soit nécessaire d'exprimer le nombre au moyen d'une base unique.

En effet, cherchons par exemple si le nombre

$$129^\circ\, 23'\, 24'',\, 85$$

est divisible par 7.

Nous prendrons d'abord, par la méthode du § X, le reste de la division par 7 du nombre

$$129^\circ\, 23'\, 24'',$$

c'est-à-dire 3, et nous aurons à reconnaître si le nombre 3″,85 ou 385 centièmes de seconde est multiple de 7; or, la différence entre la moitié des dizaines et les unités $19 - 5 = 14$ est multiple de 7, donc $385 = \text{m.}\ 7$.

Par suite, le nombre

$$129^\circ\, 23'\, 24'',\, 85$$

est divisible par 7.

APPENDICE A LA NOTE SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Nous donnons ici, à titre de curiosité, un extrait du numéro de novembre 1893 de la *Revue mensuelle* (*) de la Société des sciences de Guatemala.

Divisibilité par 19.

On sait que l'unité divisée par 19 donne une fraction périodique simple, dont la période de 18 chiffres se détermine par une simple division.

(*) Le numéro dont nous parlons renferme une remarquable étude historique rappelant les principaux savants qui ont étudié les propriétés des nombres. L'auteur, M. Al. Sanchez, y rend notamment un hommage mérité à nos célèbres compatriotes Viète, Fermat, Pascal, Descartes, Lagrange, Legendre, etc.

```
(D)  100          | 19
      50          |-------------------------
     120          |0,052 631 578 947 368 421 ...
      60
       30
       110
        150
         170
          180
            90
            140
              70
              130
               160
                 80
                  40
                   20
                    1 ...
```

On en déduit la série d'égalités :

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \times 19 + 1\\
10 &= 0 \times 19 + 10\\
100 &= 5 \times 19 + 5\\
1\,000 &= 52 \times 19 + 12\\
10\,000 &= 526 \times 19 + 6\\
100\,000 &= 5\,263 \times 19 + 3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

de sorte qu'un nombre quelconque

$$\ldots fedcba$$

pourra s'écrire

$$\ldots fedcba = \text{m. } 19 + (1 \times a + 10b + 5c + 12d + 6a + 3f + \ldots)$$

Si donc la quantité entre parenthèses est multiple de 19, le nombre proposé sera lui-même multiple de 19.

Ce caractère de divisibilité est d'une application assez compliquée, mais il peut être simplifié de la manière suivante :

Règle. — Supposons le nombre proposé partagé en tranches de neuf chiffres — à partir de la droite — cherchons l'excès de la somme des tranches de rang impair sur la somme des tranches de rang pair, multiplions successivement les diffé-

rents chiffres du reste — à partir des unités — par la série des restes obtenus dans la division (D) et ajoutons les résultats; si la somme obtenue est un multiple de 19, le nombre donné est aussi un multiple de 19.

En effet, soit un nombre quelconque

$$rqponmlkjihgfedcba.$$

D'après la première règle, nous aurions à faire la somme

$$a + 10b + 5c + 12d + 6e + 3f + 11g + 15h + 17i$$
$$+ 18j + k + 14l + 7m + 13n + 16o + 8p + 4q + 2r,$$

mais si nous observons que, dans la division (D), deux restes pris à égale distance des extrêmes donnent une somme constante égale à 19, nous pourrons remplacer la seconde des lignes précédentes par

$$(19-1)j + (19-10)k + (19-5)l + (19-12)m + (19-6)n$$
$$+ (19-3)o + (19-11)p + (19-15)q + (19-17)r,$$

ce qui donne

$$19(j + k + l + m + n + o + p + q + r)$$
$$- (j + 10k + 5l + 12m + 6n + 3o + 11p + 15q + 17r)$$

c'est-à-dire que le nombre proposé sera un multiple de 19 si la somme

$$a - j + 10(b - k) + 5(c - l) + 12(d - m) + b(e - n)$$
$$+ 3(f - o) + 11(g - p) + 15(h - q) + 17(i - r)$$

est elle-même divisible par 19.

Exemple. — Soit donné le nombre :

446 015 953 971 076 791 090 234 818

Pour appliquer la règle précédente, après avoir partagé le nombre en tranches de neuf chiffres, nous aurons à faire les calculs suivants :

1re tranche	090 234 818
3me tranche	446 015 953
somme	536 250 571
2me tranche	971 076 791
différence	434 826 020

$$\begin{array}{rcr} 1 \times 0 & = & 0 \\ 10 \times 2 & = & 20 \\ 5 \times 0 & = & 0 \\ 12 \times 6 & = & 60 \\ 6 \times 2 & = & 12 \\ 3 \times 8 & = & 24 \\ 11 \times 4 & = & 44 \\ 15 \times 3 & = & 45 \\ 17 \times 4 & = & 68 \\ \hline & & 285 = m.\ 19 \end{array}$$

d'où il résulte que le nombre proposé est un multiple de 19.

Remarque. — Dans l'exemple précédent, en appliquant la règle du § 2 à l'excès de la somme des tranches de rang impair sur la tranche de rang pair, nous aurions successivement

$$\begin{array}{lll} 217\ 413\ 01 & & \\ 108\ 706\ 6 & & \\ 54\ 340 & & +\ 19 \\ 27\ 17 & & \\ 13\ 3 & & +\ 19 \\ 6 & +\ 13 & = 19 \end{array}$$

Ainsi, nous serions dispensés d'avoir recours aux restes de la division (D).

Nota. — Au moment où nous corrigions les épreuves de cet article, M. de Longchamps nous communique le numéro de Décembre 1893 de la *Revue de la Société des Sciences* de Guatemala, qui contient un nouvel article de M. A. Sanchez sur la divisibilité.

Par une coïncidence curieuse (*), le principe de la méthode adoptée par l'auteur se rapproche beaucoup de celui qui nous a servi de point de départ, puisqu'il repose aussi sur la possibilité d'écrire un nombre premier — ou l'un de ses multiples — sous la forme $10n \pm 1$. L'application que fait M. Sanchez de ce principe diffère essentiellement de la nôtre. Mais nous tenions à signaler l'article aux lecteurs qui s'intéresseraient à ces questions.

(*) La note de M. Lalbalétrier nous a été donnée, bien avant la réception de cet article, dans les premiers jours de janvier. *G. L.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 273).

---

317. — *Soit un triangle* ABC, *on porte, en tournant dans un même sens, sur* BC, $BA_1 = l$; *sur* CA, $CB_1 = l$, *sur* AB, $AC_1 = l$. *Déterminer la longueur* l, *de manière que les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *soient concourantes.*

On a
$$l^3 = (a - l)(b - l)(c - l).$$
Soit π, le point ainsi déterminé, son réciproque π_0, jouit de la même propriété, lorsqu'on tourne en sens contraire. Les coordonnées barycentriques de ces points sont

$$(\pi) \qquad \frac{\alpha(b-l)}{l} = \frac{\beta l}{a-l} = \gamma,$$

$$(\pi_0) \qquad \frac{\alpha l}{b-l} = \frac{\beta(a-l)}{l} = \gamma.$$

L'équation de la droite $\pi\pi_0$ est
$$\sum \frac{a(2l-a)}{a-l}\alpha = 0.$$
Ces points présentent une certaine analogie avec les points de Brocard. Chacun d'eux est situé à l'intersection de trois coniques passant chacune par deux sommets, en étant tangente à un des côtés qui aboutissent à celui que l'on considère. L'équation d'une de ces coniques est
$$b\alpha^2 + \alpha\beta(b - c) - c\beta\gamma = 0.$$
L'aire du triangle pédal correspondant à π, ou à π_0, est
$$S' = \frac{l^3}{R} - S.$$

318. — *Sur les côtés d'un triangle, on porte dans un même sens de rotation les longueurs* $BA' = CB' = AC' = l$; *et en sens inverse* $CA'' = BC'' = AB'' = l$. *Déterminer* l *de manière que les perpendiculaires aux côtés menées respectivement par* A′, B′, C′, *soient concourantes ainsi que celles menées respectivement par* A″, B″, C″.

θ étant l'angle de Brocard, on trouve :
$$l = r \cot\theta$$
λ, λ' étant les deux points de concours considérés.

$$(A'\lambda) \quad \alpha(r\cot\theta - c\cos B) + \beta r\cot\theta + \gamma(r\cot\theta - a) = 0.$$
$$(B'\lambda) \quad \alpha(r\cot\theta - b) + \beta(r\cot\theta - a\cos C) + \gamma r\cot\theta = 0,$$
$$(A''\lambda') \quad \alpha(r\cot\theta - b\cos C) + \beta(r\cot\theta - a) + \gamma r\cot\theta = 0,$$
$$(B''\lambda') \quad \alpha r\cot\theta + \beta(r\cot\theta - c\cos A) + \gamma(r\cot\theta - b) = 0.$$

D'où, pour les coordonnées normales de λ, λ' ;

$$(\lambda)\qquad \frac{x}{r\cot\theta(1+\cos C)-a\cos C}=\frac{y}{a-r\cot\theta(1+\cos C)}=\frac{z}{a\cos B\cos C+r\cot\theta(\cos A-\cos B)}.$$

$$(\lambda')\qquad \frac{x}{b-r\cot\theta(1+\cos C)}=\frac{y}{r\cot\theta(1+\cos C)-b\cos C}=\frac{z}{b\cos A\cos C+r\cot\theta(\cos B-\cos A)}.$$

Ces deux points sont évidemment symétriques par rapport au centre O du cercle circonscrit.

Les coordonnées normales de λ peuvent aussi s'écrire :

$$x : y : z = 4S\cot\theta(p-b)+ac(a-c)$$
$$: 4S\cot\theta(p-c)+ab(b-a)$$
$$: 4S\cot\theta(p-a)+bc(c-b).$$

L'équation de $\lambda\lambda'$ est

$$\Sigma x[(b+c)r\cot\theta-bc]=0.$$

Si on retranche l'une de l'autre les équations de $A'\lambda$, $B'\lambda$, il vient (en coordonnées normales)

$$x(c\cos B-b)-by\cos C+cz=0,$$

droite parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle C. λ est donc situé à l'intersection de trois parallèles aux bissectrices analogues à la précédente, λ' à l'intersection de trois autres parallèles.

Si on prend le triangle $I'I''I'''$ comme triangle de référence, on trouve pour nouvelles coordonnées barycentriques de λ et λ' :

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \sin 2I'' : \sin 2I''' : \sin 2I',$$
$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \sin 2I''' : \sin 2I' : \sin 2I''.$$

Ces points sont donc les isobariques de première espèce du centre du cercle circonscrit au triangle $I'I''I'''$, ce qui permet de les construire simplement.

Il en résulte que *les isobariques du centre du cercle circonscrit à un triangle sont en ligne droite avec le centre du cercle d'Euler, et à égale distance de ce point.*

On trouve enfin pour distance des points λ, λ' :

$$\delta^2=\frac{4R}{p^2}[(R+r)p^2-r(4R+r)^2].$$

319. — K, A_1, B_1, C_1, *étant les points de Lemoine des triangles* ABC, KBC, KAC, KAB; *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont concourantes.*

Elles concourent au point dont les coordonnées barycentriques sont :

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{a^2}{b^2+c^2} : \frac{b^2}{a^2+c^2} : \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

NOTE

A PROPOS DE LA SOLUTION DE LA QUESTION 503

Par **E. Lemoine.**

J'ai dit qu'il fallait, quand on *fait* une construction, se tenir en garde contre l'apparence simple qui résulte de la façon dont cette construction s'énonce et qu'il n'y avait pour être fixé qu'à employer les méthodes de la géométrographie. L'examen de la construction des points de *Brocard*, dite très simple (*) dans le *nota* qui suit la solution de la question 503, p. 39, *J. E.* 1894, en fournit une nouvelle preuve.

Je décris $A(\rho)$, $B(\rho)$, ρ étant quelconque; op : $(2C_1 + 2C_3)$ $A(\rho)$ coupe CA en β et β'.

Au moyen de $A(\rho)$ et de $B(\rho)$, je trace la perpendiculaire au milieu de AB; op : $(2R_1 + R_2)$.

Au moyen des points β et β' je trace la perpendiculaire en A à AC; op : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Ces deux perpendiculaires se coupant au centre de Γ, je trace le cercle Γ; op : $(2C_1 + C_3)$.

Je n'ai besoin que du point D et non de la parallèle AD à BC pour éviter de la tracer, soit I le point où BC coupe Γ. Je prends sur Γ et dans le sens convenable arc ID = arc AB, op : $(3C_1 + C_3)$.

(*) Le mot *simple* dont je me suis servi, à l'endroit cité, était pris par moi dans un sens autre que celui auquel se place la géométrographie. J'avais écrit, à ce sujet, un mot à mon ami Lemoine qui, et pour éviter toute confusion, je tiens à reproduire sa réponse, m'écrit :

« Nous étions et nous sommes *parfaitement* d'accord. Ma note n'a d'autre but que de le mettre en relief. Je ne dis que ceci : la construction de Brocard est très *simple à exposer*, très élégante, c'est la solution *didactique* et c'est toujours, dans ce cas, la solution la plus simple ou la plus imagée qu'il *faut* choisir. Mais, le compas à la main, il faut remarquer qu'il y a une autre préoccupation à avoir : c'est toute la géométrographie. Voilà la morale de ma note, et il n'y a pas à craindre de donner trop de preuves de cette vérité *nouvelle*, toute pénétration se fait lentement. Les géomètres continueront à se préoccuper, d'abord, de la première dans leurs recherches; mais il faut leur montrer, qu'après cela, il reste *une autre chose à faire.* » *G. L*

Je trace CD qui coupe Γ en ω'; op : $(2R_1 + R_2)$.

L'un des points de *Brocard* est donc obtenu par le symbole : op : $(6R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 6C_3)$.

Simplicité : 24 ; exactitude : 15 ; 3 droites, 6 cercles.

Si l'on voulait trouver aussi l'autre point de *Brocard* par la même méthode il faudrait répéter ces constructions *en employant* le cercle adjoint (A_1B_1BC); on ferait une économie de $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$ puisque les cercles $A(\rho)$ $B(\rho)$ et la perpendiculaire au milieu de AB sont déjà tracés. Pour placer par la méthode indiquée les deux points de *Brocard* on aurait donc le symbole :

$$\text{op} : (10R_1 + 5R_1 + 16C_1 + 10C_3)$$

simplicité : 41 ; exactitude : 26; 5 droites, 10 cercles.

Nous avons fait cette construction suivant les règles de la géométrographie, en traçant le moins de lignes possible, en profitant des éléments de la figure pour fixer D sans tracer AD, etc.

Mais il est évident qu'il ne faut pas, puisque ω' est fixé, chercher ω par la méthode analogue; l'on doit, en effet, profiter des constructions faites. Il faudra opérer ainsi.

Quand j'avais ρ dans le compas, j'ai tracé $C(\rho)$ op : (C_1+C_3).

En supposant que ω' soit placé, je trouve donc $C\omega$ au moyen de l'arc intercepté sur $C(\rho)$ par $C\omega'$

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3).$$

Je trace $B\omega$ au moyen du cercle $B(\rho)$ op : $(2R_1+R_2+C_1+C_3)$, on a donc les deux points de *Brocard* par le symbole

$$\text{op} : (10R_1 + 5R_2 + 14C_1 + 9C_3).$$

simplicité : 38; exactitude : 15; 5 droites, 9 cercles.

La construction, moins élégante *à énoncer* que nous avons donnée au Congrès de l'Association française, à Besançon, août 1893, pour placer ces deux points, a pour symbole

$$\text{op} : (8R_1 + 4R_2 + 13C_1 + 7C_3)$$

simplicité : 32; exactitude : 21; 4 droites, 7 cercles

et est *absolument* plus simple, toutes choses égales d'ailleurs, que celle exécutée au moyen des cercles adjoints, comme l'indique le *nota*, puisque tous les coefficients des opérations élémentaires sont plus petits.

CORRESPONDANCE

« Vous avez donné, J.-E 1894, p. 54, un joli théorème sur l'ellipse, mais vous en déduisez une *construction* qui, elle, est susceptible de la critique la plus absolue, et ne doit jamais être employée; ces quelques lignes mettront une fois de plus en relief le point de vue où se place la *Géométrographie*, et l'usage qu'il faut en faire; s'il ne vous déplaît pas qu'elles paraissent comme une critique, bénigne d'ailleurs, de votre *construction*, je ne dis pas du théorème, je demande pour elles l'hospitalité du journal.

Je suppose que l'ellipse soit donnée par les deux foyers F et F′ et le point M : je veux trouver la tangente en M à la courbe.

1° Construction ordinaire.

Je trace MF′, puis le cercle M (MF) qui coupe F′M en μ (au delà de M dans le sens F′M), puis d'un rayon suffisant ρ les deux cercles F(ρ), μ(ρ) qui se coupent en I. Je trace MI, c'est la tangente cherchée, obtenue ainsi par lesymbole :

$$4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_3 ;$$

simplicité : 13, c'est-à-dire 13 opérations élémentaires;

exactitude : 8; 2 droites, 3 cercles.

2° Votre construction, maintenant.

Par M je prends sur le secteur MF une longueur MU = C; il faut donc d'abord tracer FF′ s'il ne l'est pas, et prendre le milieu de FF′.

Vous avez ainsi le symbole

$$6R_1 + 3R_2 + 5C_1 + 3C_3 ;$$

par M, il faut mener une parallèle à FF′ :

$$2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$$

puis prendre $MV = a$, comme $F'\mu = 2a$ il faut d'abord prendre le milieu de F′μ, ce qui donne

$$2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3 ;$$

La construction que nous avons indiquée dans le précédent numéro, p. 54, nous a valu les deux lettres très intéressantes qui suivent, et que nous croyons utile de publier. La première est de M. Lemoine; la seconde de M. d'Ocagne.

enfin, mener en U et en V les perpendiculaires respectivement aux droites MU, MV :

$$8R_1 + 4R_2 + 2C_1 + 2C_3,$$

qui se coupent en M'; enfin, tracer MM' :

$$2R_1 + R_2,$$

construction qui se résume par le symbole

$$20R_1 + 10R_2 + 15C_1 + 11C_3;$$

simplicité : 56, ou 56 opérations élémentaires.

exactitude : 35 ; 10 droites, 11 cercles ;

Et notez que j'ai pris les constructions les plus simples indiquées par la Géométrographie et opéré économiquement. »

Voici la lettre de M. d'Ocagne :

« Permettez-moi de vous faire observer que la construction de la tangente à l'ellipse que vous donnez dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* se déduit immédiatement du classique théorème de Poinsot sur la construction de la normale à une courbe définie par une relation entre les distances normales de chacun de ses points à des courbes fixes ; théorème que j'ai moi-même généralisé dans les *N. A. M.* (1890, p. 289).

Ce théorème, réduit au cas de deux courbes fixes, consiste, comme vous savez, en ce que les distances ρ et ρ_1 étant liées par l'équation

$$F(\rho, \rho_1) = o,$$

la normale cherchée est la résultante de F'_ρ et F'_{ρ_1}, longueurs portées respectivement sur ρ et sur ρ_1.

Soient donc f, f_1 les distances d'un point d'une ellipse aux foyers F, F_1 de cette courbe, d la distance de ce point à la directrice correspondant à F.

L'équation de l'ellipse peut s'écrire, à volonté,

$$f + f_1 = 2a,$$

ou

$$cd - af = o$$

Dans le premier cas, le théorème de Poinsot donne la construction classique de la normale, et par suite, de la tangente à l'ellipse; dans le second, il donne la construction que vous venez d'indiquer.

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Questions à choisir :* 1° Calculer sin a et cos a en fonction de tang $1/2\,a$; 2° Connaissant sin a ou cos a, calculer tang $1/2\,a$. On expliquera tous les résultats.

II. On donne deux côtés d'un triangle et l'angle qu'ils comprennent, trouver les autres éléments et la surface du triangle. — Peut-on calculer directement le troisième côté sans calculer préalablement les angles ? — Indiquer une formule de vérification des calculs.

III. Résoudre et discuter l'équation $a \sin x + b \cos x + c = 0$.

Résoudre l'équation

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x + 1 = 0,$$

Problème unique. — Une pyramide hexagonale régulière a pour arête latérale une longueur donnée a, trouver le maximum de son volume. Généraliser pour une pyramide régulière quelconque, ayant la même arête, puis pour un cône d'apothème a.

Nota. — Les candidats ne doivent pas faire usage de logarithmes.

Académie de Poitiers.

I. *Questions à choisir :* 1° Établir les relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque, et montrer que les divers systèmes de relations peuvent se déduire les uns des autres.

II. Résoudre un triangle, connaissant les côtés a, b et l'angle A. Discussion complète et interprétation géométrique.

III. — Établir l'un des systèmes de formules qui font connaître les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés et déduire de la condition de réalité la possibilité de construire le triangle.

Problème. — Étant donné un cercle O de rayon a, on mène une droite OX et une tangente H′ parallèle à OX. De quel point A de OX faut-il mener une seconde tangente AH, comprise entre ces deux parallèles, pour que le volume engendré par la révolution du trapèze OHHA autour de OX soit égal à un volume donné $\pi a^2 m$? — Discussion.

Académie de Toulouse.

I. Équilibre de la poulie mobile.

II. Deux circonférences qui se coupent en deux points ont pour rayons R, et R′ la distance des centres est a. On demande : 1° l'aire du triangle T ayant pour sommets les deux centres et l'un des points d'intersection des deux circonférences ; 2°, la longueur de la corde commune ; 3° les longueurs des arcs sous-tendus par cette corde ; 4° l'aire de la partie du plan commun aux deux cercles ; 5° le volume engendré par le triangle T tournant autour de la ligne des centres.

Application au cas où $R = 3$, $R' = 4$, $a = 5$. On ne fera que les calculs possibles sans le secours des tables.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Problème obligatoire.* Dans la section principale ABC d'un prisme de verre, on fait tomber un rayon lumineux SD sous l'incidence i. Ce rayon, après s'être réfracté suivant DE, se réfléchit sur la face AC et émerge suivant FG, faisant avec la normale à la face AC un angle L'. On suppose que le triangle ABC est un triangle équilatéral et que le rayon SD est un pinceau de lumière blanche. On demande : 1° la relation entre les angles i et i' ; 2° la nature du faisceau lumineux émergent FG.

II. *Questions à choisir :* 1° Définition de l'erreur absolue et de l'erreur relative. Théorie des erreurs relatives ;

2° Variation du quotient de deux trinômes du second degré. Représentation graphique.

3° Cas d'égalité des trièdres.

Académie de Rennes.

Discussion des signes du trinôme $ax^2 + bx + c$, lorsqu on fait varier x de $-\infty$ a $+\infty$.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Choisir entre les trois questions suivantes :* 1° Démontrer que dans tout angle trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres ; 2° Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits ; 3° Démontrer que lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au même plan, et que, réciproquement, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.

II. Dans une circonférence O, on mène une corde AB égale au côté du carré inscrit, et par le même point A, une corde AC égale au rayon.

1° Calculer l'aire du triangle curviligne ABC ;

2° Calculer le volume engendré par ce triangle tournant autour du diamètre OB.

Académie de Poitiers.

Etudier les variations de la fraction

$$\frac{x^2 + px + q}{x^2 - 2ax + a^2}$$

p, q, a, sont des quantités positives.

Déterminer l'angle de deux plans dont les traces horizontales sont parallèles.

2e *série.* — I. Calculer à 0,01 près le sinus et le cosinus de l'arc de 12°, connaissant $\sin 30^\circ = 1/2$.

II. Distance d'un point de la ligne de terre à un plan donné par sa trace horizontale et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal de projection.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Trouver les angles d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

Définir l'hélice, la tangente en un point de l'hélice et prouver que la tangente fait avec l'arête du cylindre un angle constant.

SUR L'EXERCICE 315

par M. **Ch. Michel**, élève au collège Chaptal.

M. Boutin demande, dans le numéro de mars, une solution géométrique de l'exercice 315. En voici une, mais ce n'est peut-être pas la plus simple.

Il est facile de voir que l'isogonale de la droite AM relative à l'angle A est perpendiculaire à la droite de Simson du point M. Il en résulte immédiatement que l'angle des droites de Simson de deux points M et M′ est égal à l'angle MAM′.

Cela posé, l'isogonale de la droite AM relative à l'angle A est une direction asymptotique de l'hyperbole, transformée par points inverses de la droite OM. La droite de Simson du point M est donc l'autre direction asymptotique. Mais on sait que toute droite de Simson est asymptote à une hyperbole équilatère circonscrite au triangle de référence. Donc *la droite de Simson du point* M *est asymptote à l'hyperbole transformée par points inverses de la droite* OM.

Or, les droites MH et M′H′ sont rencontrées par les droites de Simson correspondantes en leurs milieux P et P′ et comme H est un centre de similitude du cercle circonscrit et du cercle des neuf points, P et P′ appartiennent au cercle des neuf points. Ce cercle est rencontré par les droites de Simson en deux autres points Q et Q′ qui sont les centres des hyperboles équilatères transformées des droites OM et OM′. L'angle des droites de Simson a pour mesure, sur la circonférence des neuf points, la demi-différence des arcs QQ′ et PP′. Mais ayant, comme il est dit plus haut, pour mesure, sur la circonférence circonscrite, la moitié de l'arc MM′, il a aussi pour mesure, sur la circonférence des neuf points, la moitié de l'arc PP′. Donc

$$\text{arc } QQ' = 2 \text{ arc } PP'.$$

Par suite $\widehat{QO_9Q'} = 2\,\widehat{PO_9P'} = 2\,\widehat{MOM'}$.

C. Q. F. D.

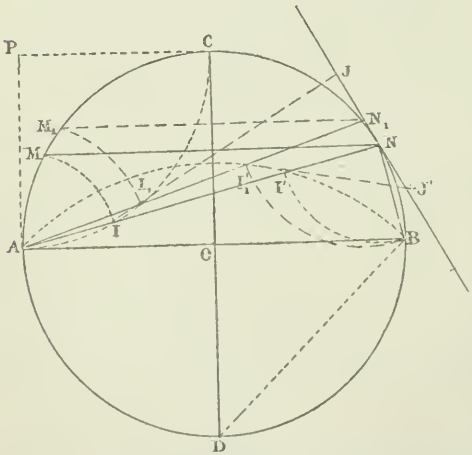
Ce dernier théorème sur la droite de Simson n'est pas nouveau. Il a été démontré en particulier par M. Weill, professeur au collège Chaptal, dans une note qu'il a publiée sur la droite de Simson, dans ce Journal même, en 1884. Au fond, le théorème de M. Boutin n'en est qu'une transformation.

QUESTION 242

Solution par M. Droz-Farny.

On considère un cercle O *et deux diamètres rectangulaires* AB, CD; *les tangentes en* C *et* A *se coupent en* P. *Soit* MN *une corde quelconque parallèle à* AB; *on rabat* AM *en* AI *sur* AN *et* NB *en* NI′ *sur* NA; *enfin on joint* IP *et* DI′. *Démontrer que les perpendiculaires élevées : l'une à* PI, *au point* I; *l'autre à* DI′ *au point* I′; *rencontrent la tangente en* N *en deux points* J, J′ *symétriques par rapport à* N. (G. L.)

La bissectrice de l'angle ANB étant ND, comme le triangle NBI′ est isoscèle est perpendiculaire sur BI′ en son point milieu; donc DB = DI′ et le lieu de I′ est la circonférence décrite, de D pour centre, avec DB comme rayon; de même CM = CI; donc triangle CMA = CIA et angle AIC = AMC = 135°. Le lieu de I est symétrique de celui de M par rapport à la corde AC; donc une circonférence de centre P et de rayon PA = PC. Supposons deux cordes



MN et M_1N_1 ainsi que les points I, I′ et I_1, I'_1. Comme AM = NB et AM = BN_1, les points I, I′ et $I_1I'_1$ sont isotomiques sur les côtés AN et AN_1 du triangle ANN_1. Les droites II_1 et $I'I_1$ sont donc des transversales réciproques et coupent le troisième côté NN_1 suivant deux points isotomiques J, J′.

Supposant MN et M_1N_1 infiniment voisines, les transversales II_1, $I'I'_1$, NN_1 deviennent tangentes à leurs circonférences respectives aux points I, I′, N et la propriété subsistant, le théorème est démontré.

QUESTION 248

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

Un segment de droite variable se déplace entre deux axes fixes de telle façon que sa projection orthogonale sur l'un des deux axes

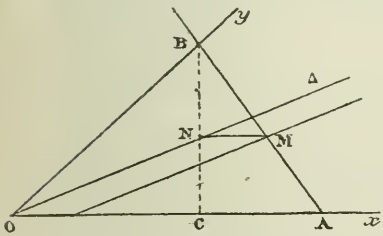


Fig. 1.

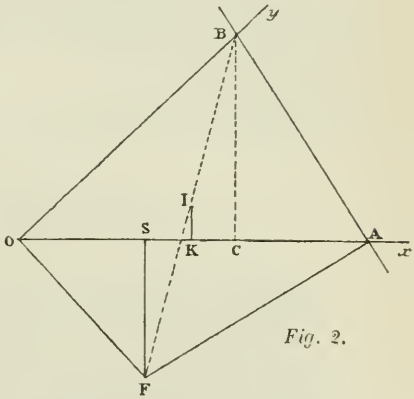


Fig. 2.

reste constante. 1° Quel est le lieu du milieu de ce segment de droite? 2° Quelle est l'enveloppe de ce segment de droite?

(d'Ocagne.)

1° Soient Ox, Oy les deux axes et A, B les extrémités du segment de droite, respectivement situées sur Ox et Oy. De

B abaissons la perpendiculaire BC sur Ox; par hypothèse $AC = c^{te}$.

Par le milieu M de AB menons une parallèle à Ox jusqu'à sa rencontre en N avec BC, on a

$$MN = \frac{AC}{2} = c^{te}.$$

Or, N étant le milieu de BC, le lieu de ce point est une droite Δ issue de O, par suite NM étant constante en grandeur et en direction, le lieu de M est une parallèle à Δ.

2° Prenons sur ox une longueur OS égale à la constante donnée, et de ce point élevons une perpendiculaire à Ox jusqu'à la rencontre en F avec la perpendiculaire élevée en O à Oy et joignons FA : je dis que l'angle FAB ainsi formé est droit. En effet, soient I le milieu de FB et K le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur Ox; K est le milieu de SC et par suite de OA, puisque S et C sont isotomiques par rapport à OA. On a donc IA = IO, et la circonférence décrite sur FB comme diamètre, qui passe par O, passe aussi par A Le quadrilatère OBAF est donc inscriptible et comme l'angle BOF est droit, l'angle FAB l'est aussi. L'enveloppe de AB est donc une parabole ayant F pour foyer et Ox pour tangente au sommet.

QUESTION 257

Solution par M. A. Droz Farny.

ABC *étant un triangle donné; soit* D *le point de contact avec* BC, *du cercle inscrit* O. *On projette les sommets* B, C *en* E, F *sur la bissectrice* AO; *puis l'on construit les parallélogrammes* DEBG, DFCH. *Cela posé : 1° les points* B, G, C, H *appartiennent à une circonférence. 2° le centre de cette circonférence et le centre* O *du cercle inscrit sont également distants du côté* BC.

(E. Catalan.)

1° BE et CF étant parallèles (*), les points G, D, H sont en ligne

(*) Voyez *figure* 2.

droite. Or, angle $BOE = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$; dans le quadrilatère inscriptible OBDE on a donc

$$\text{angle } BDE = DBG = 180 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 90 + \frac{C}{2}.$$

De même, dans le quadrilatère inscriptible ODFC, on a

$$4\ DFC = DAC = 90 + DFO = 90 + \frac{C}{2}.$$

Les angles GBC et GHC étant égaux, le quadrilatère BGCH est inscriptible.

2° Soit M le point milieu de BC; on sait qu'en supposant $b > c$

$$ME = MF = \frac{b-c}{2},$$

$$MD = \frac{a}{2} - BD = \frac{a}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-c}{2}.$$

Les trois points EDF sont sur une circonférence ayant M pour centre.

Abaissons de M la perpendiculaire MS sur DE; elle coupe BG prolongée en R. La perpendiculaire en U, point milieu de BG sur BG, rencontre la perpendiculaire en M sur BC au centre L de la circonférence BGCH. Soit enfin MI perpendiculaire sur LU.

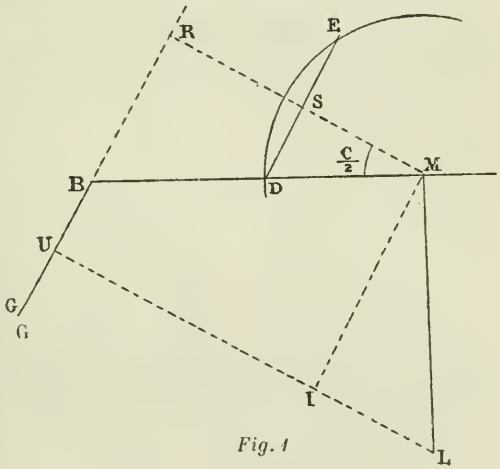


Fig. 1

$$\frac{RB}{DS} = \frac{BM}{DM} = \frac{a}{b-c}; \qquad \frac{RU}{DS} = \frac{a+b-c}{b-c}.$$

ME étant parallèle à AC, on a

$$DMS = IML = \frac{C}{2}.$$

$$RU = \frac{b-c}{2} \sin\frac{C}{2} \cdot \frac{a+b-c}{b-c} = (p-c)\sin\frac{C}{2}$$

$$ML = \frac{MI}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{RU}{\cos\frac{C}{2}} = (p-c)\,\mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = r.$$

C. Q. F. D.

Seconde solution :

1° Pour démontrer que le quadrilatère BGCH est inscriptible, il suffit de démontrer que les angles GBD et DHC sont égaux.

Or, le quadrilatère DFOC étant inscriptible, l'angle DFC est égal à l'angle DOC, c'est-à-dire à $90° - \frac{C}{2}$.

De même la quadrilatère BEDO étant inscriptible, l'angle $\widehat{BDE}$ est égal à $\widehat{BOI}$.

Mais $$BOI = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2} = 90° - \frac{C}{2}$$

donc $$\widehat{DFC} = \widehat{BDE}$$

2° Soit O_1 le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère BGCH. Ce point se trouve à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux M et N des côtés BC et GH et nous allons démontrer que $O_1M = OD$.

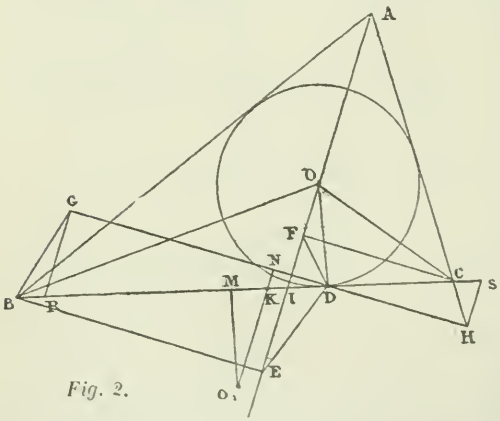


Fig. 2.

Par les points G et H j'élève les perpendiculaires à GH jusqu'à leurs rencontres en R et S avec AB. Le point K où NO_1 rencontre AB est le milieu de RS. Or, M étant le milieu de AB et BR étant égal à CS, on a évidemment

$$KM = BR$$

mais on a aussi $BR = ID$;

donc $KM = ID$.

De plus, les angles MKO_1 et OID étant égaux, les deux triangles rectangles MKO_1 et IDO sont égaux et

$$O_1M = OD. \quad (*)$$

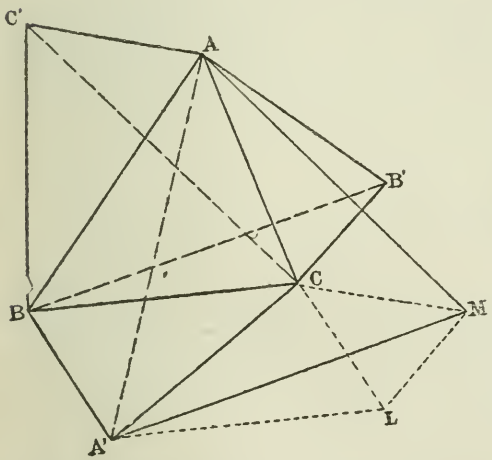
QUESTION 272

Solution par M. A. Droz-Farny.

Sur les côtés d'un triangle ABC, *on construit trois triangles semblables* A'BC, B'CA, A'BC. *Démontrer : 1° que les droites* AA', BB', CC' *sont en grandeur et en direction les côtés d'un triangle* T; *2° calculer l'aire de ce triangle et la somme* $\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2$ *en fonction des côtés de* ABC *et des angles de* A'BC.

(J. Neuberg.)

Les trois droites BA', CB', AC' également inclinées sur les côtés du triangle ABC et respectivement proportionnelles à BC, CA, AB déterminent un triangle semblable à ABC. Menons par A' les droites A'L et A'M respectivement équipollentes à BC et à BB'; comme CL et LM seront équipollentes à BA' et à CB', angle CLM = C. Par conséquent, CM est égale et parallèle à AC'; AM est égale et parallèle



(*) Cette solution est de M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

à CC'. Le triangle AA'M a donc ses côtés égaux et parallèles à AA', BB', CC'.

Représentons par α, β, γ les angles du triangle A'BC.

On a $\overline{AA'}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB.A'B\cos(B+\beta)$;

or
$$A'B = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

donc
$$\overline{AA'}^2 = \frac{a^2\sin^2\gamma + c^2\sin^2\alpha - 2ac\sin\alpha\sin\gamma\cos(B+\beta)}{\sin^2\alpha},$$

de même,
$$\overline{BB'}^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\gamma - 2ab\sin\alpha\sin\gamma\cos(C+\beta)}{\sin^2\alpha},$$
$$\overline{CC'}^2 = \frac{b^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\gamma - 2bc\sin\alpha\sin\gamma\cos(A+\beta)}{\sin^2\alpha},$$

$$\Sigma\overline{AA'}^2$$
$$= \frac{(\Sigma a^2)(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma) - 2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta(a\cos B + ab\cos C + bc\cos A) + 12\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)[\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta] + 12\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}$$
$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + 12\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

La surface du triangle A'AM se compose : 1° du triangle ACA', 2° du triangle ACM = triangle ACC', 3° du triangle A'CM dont les côtés connus A'C et CM = AC' contiennent entre eux l'angle $(B+\alpha)$. On a donc

$$S = \frac{bc\sin\gamma}{2\sin\alpha}\sin(A+\beta) + \frac{ab\sin\beta}{2\sin\alpha}\sin(C+\gamma) + \frac{ac\sin\gamma\sin\beta}{2\sin^2\alpha}\sin(B+\alpha)$$
$$= \frac{2\Delta[\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha]}{2\sin^2\alpha}$$
$$+ \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma[bc\cos A + ba\cos C + ac\cos B]}{2\sin^2\alpha};$$

et, après simplification,
$$S = \frac{4\Delta(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\Sigma a^2}{4\sin^2\alpha}.$$

Remarque. — On sait que, dans un triangle, la cotangente de l'angle de Brocard est exprimée par l'une ou l'autre des formules :

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta} - \frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Représentons par V, v, V′ les angles de Brocard des triangles ABC, A′BC et AA′M.

Les formules précédentes deviendront

$$\Sigma\overline{AA'}^2 = \frac{[(a^2 + b^2 + c^2)\operatorname{cotg} v + 12\Delta]\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha},$$

$$\Sigma\overline{AA'}^2 = \frac{4\Delta.\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}[\operatorname{cotg} V\operatorname{cotg} v + 3]$$

$$S = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4\sin^2\alpha}[\Sigma a^2 + 4\Delta\operatorname{cotg} v],$$

$$4S = \frac{4\Delta\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha}[\operatorname{cotg} V + \operatorname{cotg} v]$$

par division

$$\operatorname{cotg} O' = \frac{\operatorname{cotg} v\operatorname{cotg} V + 3}{\operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} V}.$$

En chassant le dénominateur et ajoutant de part et d'autre $\operatorname{cotg}^2 v$, on trouve la formule suivante, due à M. J. Neuberg :

$$(\operatorname{cotg} V + \operatorname{cotg} v)(\operatorname{cotg} v - \operatorname{cotg} V') = \operatorname{cotg}^2 v - 3.$$

Le triangle AA′M peut-il être semblable à A′BC? Dans ce cas, il faudrait d'abord avoir $\operatorname{cotg} v = \operatorname{cotg} V'$ ou

$$\operatorname{cotg} v\,\frac{\operatorname{cotg} v\operatorname{cotg} V + 3}{\operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} V}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{cotg}^2 v = \operatorname{cotg}^2 V' = 3.$$

Pour que AA′M soit semblable à A′BC, ce dernier doit être nécessairement équilatéral, théorème bien connu.

QUESTIONS PROPOSÉES

547. — *Théorème.* Ω, Ω′, étant *les points de Brocard* d'un triangle ABC, on sait que ces points sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle. Cela posé, si l'on représente par f le grand axe de cette courbe, et que l'on fasse

$A\Omega = u$, $B\Omega = v$, $C\Omega = w$, $A\Omega' = u'$, $B\Omega' = v'$, $C\Omega' = w'$,

on a $$f = \sqrt[3]{uvw} = \sqrt[3]{u'v'w'}\ (*)$$

(E. Catalan.)

(*) Voir la Note intitulée : *Sur quelques formules relatives aux triangles rectilignes.*

548. — On considère un triangle ABC, rectangle en A, et le cercle inscrit qui touche les côtés BC, CA, AB, respectivement, aux points A′, B′, C′.

La bissectrice de l'angle BAC coupe: A′B′, en P; A′C′, en Q.

Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle PQA′ a pour centre le milieu de BC. *(G. L.)*

549. — Si de l'orthocentre d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle A, la droite qui joint leurs pieds passe par le milieu du côté BC.

(Droz-Farny.)

550. — On prolonge le côté AB d'un triangle ABC d'une longueur BD troisième proportionnelle à BC et BA; puis on mène DE perpendiculaire sur AB, CE perpendiculaire sur BC. Démontrer que BE est perpendiculaire sur la médiane issue de B. *(Lucien Lévy.)*

551. — On donne six droites $a_1, a_2, a_3 \ldots a_6$ rangées par ordre de grandeur. Combien peut-on faire au maximum de tétraèdres non superposables avec ces six droites? Discuter le problème en montrant quels sont les seuls nombres possibles de tétraèdres que l'on peut former au-dessous du maximum suivant les relations de grandeur qu'il peut exister entre ces six droites. *(E. Lemoine.)*

ERRATUM

Une erreur de mise en pages a obscurci la rédaction de l'article de M. Fouché sur les propriétés des polynômes entiers, publié dans notre numéro de février 1894.

Pour rétablir l'ordre de la rédaction, il faut, après la ligne 8 de la page 26, finissant par : « la suite des idées », passer à la ligne 16 de la page 27, commençant par *Théorème I;* lire l'article jusqu'à la fin du texte imprimé, puis revenir à la ligne 9 de la page 26 commençant par *Corollaire I*, et achever la lecture jusqu'à la 15e ligne de la page 27.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6456-4-94.

SUR LA PRATIQUE DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION

Par M. **Aubry**.

Au point de vue de l'élégance et de la simplicité de l'exposition, les règles de ces deux opérations ne laissent rien à désirer. Mais, peut-être, au point de vue de l'exécution, pourrait-on apporter quelques modifications pratiques.

Ainsi, si l'un des chiffres du multiplicateur est 9, il y aura avantage à multiplier par 10 et retrancher le multiplicande. Si celui-ci est 3 497 218, par exemple, on dira : 8 de 0, reste 2, et je retiens 1 ; 1 et 1, 2, de 8, reste 6 ; 2 de 1, reste 9, et je retiens 1 ; 1 et 7, 8, de 2 reste 4, et je retiens 1 ; 1 et 9, 10, de 7 reste 7, et je retiens 1 ; 1 et 4, 5, de 9 reste 4 ; 3 de 4, reste 1 ; 0 de 3, reste 3. Le produit partiel est 31 474 962.

La multiplication par 5 se fait en multipliant par 10 et prenant la moitié.

Si le multiplicateur est de la forme ... 8 ... 2 ... ou ... 35 ... 7 ..., par exemple, on aura, dans le second cas, le produit correspondant à 8, en multipliant par 4 celui correspondant à 2 ; et, dans le second cas, ceux correspondant aux chiffres 3, 5, en multiplant par 5 celui correspondant à 7. Le principe est aisé à appliquer dans tous les cas analogues.

M. Collignon (voir *J. M. E.*, 1893, p. 169) a donné un procédé applicable à tous les cas. En voici un autre tout aussi général.

Le calcul d'un produit partiel comprend une suite de multiplications et d'additions successives exigeant la connaissance de $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ produits et de $45 \times 9 = 405$ totaux. Ces opérations de nature différentes et faites, pour ainsi dire simultanément, demandent une attention soutenue que ne peut pas toujours donner le calculateur, si cette opération n'est pas son but immédiat.

Il semble qu'il y aurait avantage à faire et à écrire d'abord tous les produits et, ensuite, à faire toutes les additions. Par exemple, soit à multiplier 3 497 218 par 658 296 : on pourra multiplier les nombres 3 090 208 et 407 010 par 658 296, puis additionner les deux résultats. On pourra ainsi écrire très rapidement les différents produits partiels, en commençant si l'on veut par la gauche :

	3090208	407010
	658296	658296
	18541248	244206
	27811872	366309
	6180416	81402
	24721646	325608
	15451040	203505
	18541248	244206
1er produit :	2034271547568	
2e produit :	267933054960	
Produit total :	2302203602528	

On pourrait condenser les deux opérations en une seule en mettant un point sous les chiffres de rangs pairs du multiplicande, et multipliant successivement les deux multiplicandes partiels par chaque chiffre du multiplicateur. Mais il y aurait ainsi bien plus de chances d'erreurs pour un très faible gain de temps.

Quant à la multiplication abrégée, elle nous paraît être seulement un très utile moyen de vérification; son plus grand désavantage, au point de vue pratique, est de ne pas se prêter à l'emploi si nécessaire de la preuve par 9.

Dans la division, il est à remarquer que la recherche des restes successifs entraîne à une série de multiplications, d'additions et de soustractions, encore plus pénible que dans la multiplication. Nous pensons qu'il y a avantage comme temps à calculer, en l'écrivant à mesure, le produit du diviseur par le dernier chiffre du quotient et à faire ensuite la soustraction. Ce procédé est certainement préférable comme facilité d'exécution.

On a proposé diverses tables pour faciliter les multiplications et les divisions. D'abord les tables de carrés donnant

le produit ab par le moyen des carrés des nombres $a + b$, $a - b$, dont on prend la différence, en divisant ensuite celle-ci par 4. Pour plus de facilité, on a exécuté dans ce but spécial, des tables de *quarts de carrés*, ce qui réduit le produit à une addition, une soustraction, deux recherches dans la table et une dernière soustraction. Même avec ce perfectionnement, l'opération est encore assez longue.

On a en outre les tables de multiplication de Crelle, contenant les produits des mille premiers nombres, les uns par les autres; les tables de division de Picarte donnant les neuf premiers multiples des *inverses* des *cent mille* premiers nombres, ce qui réduit la division à des recherches dans la table et une addition; enfin les petites tables de Tripier, donnant les neuf premiers multiples des *dix mille* premiers nombres, et pouvant servir à la multiplication et à la division.

Ce dernier plan nous paraît le meilleur, et nous pensons que l'on rendrait un réel service aux calculateurs par la publication d'une table des neuf premiers multiples des nombres de 10000 à 100000. On effectuerait ainsi rapidement les multiplications et divisions par des nombres de cinq à six chiffres au plus, ce qui suffirait dans la plupart des cas.

SUR LE TRAPÈZE

Par M. **L. Vautré**, professeur au séminaire d'Autrey.

I. — Soit ABCD un trapèze quelconque, dont nous désignerons les bases, AB et CD, par a, b, les côtés AC, BD, par c, d, et les diagonales AD, BC, par f, g.

La ligne brisée ABCDA est fermée, et les côtés AD, BC, se coupent; donc d'abord

$$c + d + g > f;$$
$$f + g > c + d.$$

Achevons les parallélogrammes CADE, DABF, et menons EF et BE.

Le côté DF est le prolongement de CD, et BCEF est encore un parallélogramme, puisque BF et CE sont égaux et parallèles.

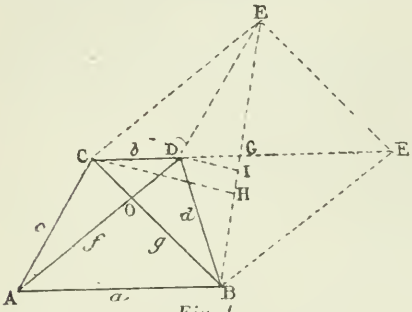


Fig. 1.

Supposons d'abord $c = d$, d'où DE = DB. Alors, de deux choses l'une : ou bien D se confond avec le milieu G de CF, dans ce cas $a = b$; ou bien D est distinct de G; dans ce cas, DG est perpendiculaire au milieu G de BE, par conséquent CB = CE, d'où $f = g$. — Réciproquement, si l'on supposait $f = g$, d'où CE = CB, il en résulterait DB = DE, d'où $c = d$. Ainsi :

Dans tout trapèze, l'égalité des côtés obliques entraîne celle des bases ou celle des diagonales, et l'égalité des diagonales entraîne celle des côtés obliques.

Supposons maintenant

$$c > d, \qquad f > g,$$

d'où

$$\text{CE} > \text{CB}, \qquad \text{DE} > \text{DB}.$$

Les points C et B sont alors nécessairement situés du même côté de la perpendiculaire élevée au milieu G de BE, et par conséquent aussi du même côté de BE; donc

$$\text{DF} > \text{DC}, \qquad \text{d'où} \qquad a > b.$$

Ainsi : dans tout trapèze, la plus grande base, la plus grande diagonale et le plus grand des côtés obliques sont issus d'un même sommet.

D'un autre côté, si l'on conçoit l'hyperbole qui a pour foyers les points B et E, et passe au point D, le point C étant sur le prolongement du demi-diamètre GD est intérieur à la courbe. Donc

$$\text{CE} - \text{CB} > \text{DE} - \text{BD},$$

d'où

$$f - g > c - d.$$

Ainsi : dans tout trapèze, la différence des diagonales est plus grande que celle des côtés obliques. Il faut toutefois excepter le cas où les deux différences sont nulles.

En résumé, si l'on suppose

(1) $$c > d, \qquad f > g,$$

on a les inégalités

(2) $$c + d + g > f,$$

(3) $$f + g > c + d,$$

(4) $$f - g > c - d,$$

Des deux dernières, on déduit, par addition :

(5) $$f > c,$$

Donc : dans tout trapèze, la plus grande diagonale est plus grande que chacun des côtés obliques.

En multipliant membre à membre les mêmes inégalités (3) et (4), on obtient

(6) $$f^2 - g^2 > c^2 - d^2,$$

Enfin, en les additionnant, après en avoir élevé au carré les deux membres :

(7) $$f^2 + g^3 > c^2 + d^2,$$

Les inégalités (2), (3), (5), (7) subsistent dans tous les cas, mais l'inégalité (6), comme l'inégalité (4), se transforme en égalité quand $f = g$.

II. — Le point G étant le milieu de BE, les triangles BCE, BDE, donnent, en vertu de deux théorèmes bien connus, en menant les hauteurs DI, CH :

$$\begin{cases} \overline{CB}^2 + \overline{CE}^2 = 2\overline{CG}^2 + 2\overline{GB}^2, \\ \overline{DB}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{DG}^2 + 2\overline{GB}^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{CE}^2 - \overline{CB}^2 = 2\,BE \times GH, \\ \overline{DE}^2 - \overline{DB}^2 = 2\,BE \times GI. \end{cases}$$

D'autre part, le point G est le milieu de CF, et $DF = a$; donc $$CG = \frac{a+b}{2}, \qquad DG = \frac{a-b}{2}.$$

Retranchant membre à membre les deux premières égalités, puis divisant membre à membre les deux suivantes, on obtient, en remplaçant d'abord le rapport $\frac{GH}{GI}$ par son égal $\frac{CG}{GD}$, puis CG et DG par leurs valeurs ci-dessus :

(8) $$(f^2 + g^2) - (c^2 + d^2) = 2ab,$$

(9) $$\frac{f^2 - g^2}{c^2 - d^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Telles sont les relations qui lient les six éléments rectilignes d'un trapèze quelconque. Elles sont absolument générales; toutefois, la seconde devient illusoire quand $c = d$, ce qui, comme on l'a vu, entraîne, soit $a = b$, soit $f = g$.

III. — Application : *Construire un trapèze, connaissant les diagonales et les côtés obliques.*

Examinons d'abord deux cas particuliers :

1° Soit $c = d$, et supposons $f > g$.

On en conclut DE = DB, et CE > CB. Par conséquent, le point G se confond avec D, d'où $a = b$: le trapèze demandé est alors un parallélogramme.

Le triangle BCE a ses côtés égaux à f, g. et $2c$. Les conditions de réalité de ce triangle se réduisent à

$$f + g > 2c, \qquad 2c + g > f.$$

Quand elles sont remplies, il y a une solution, qui est unique.

Soient $c = d$, et $f = g$.

L'oblique ED étant moindre que chacune des obliques égales EC, EF, qui la comprennent, il faut que l'on ait $f > c$.

Si cette condition est remplie, on construira le triangle isocèle CEF, en prenant EC et EF égaux à f, et l'angle E quelconque. On mènera ensuite du sommet à la base une droite ED égale à c, et on achèvera les parallélogrammes CEDA, CEFB. Le trapèze ABCD satisfera évidemment aux conditions données. On voit qu'il est indéterminé.

Abordons maintenant le cas général

$$(1) \qquad c > d, \quad \text{et} \quad f > g \ldots$$

Solution algébrique. — Les quantités $(f^2 + g^2)$, $(f^2 - g^2)$, $(c^2 + d^2)$, $(c^2 - d^2)$, étant positives, nous poserons pour abréger :

$$(10) \quad f^2+g^2=m^2; \quad f^2-g^2=n^2; \quad c^2+d^2=p^2; \quad c^2-d^2=q^2;$$

La proportion (9) donne la suivante

$$\frac{a}{b} = \frac{n^2 + q^2}{n^2 - q^2};$$

en combinant celle-ci avec la relation (8), on obtient

$$(11)\quad a=\sqrt{\frac{(m^2-p^2)(n^2+q^2)}{2(n^2-q^2)}};\qquad b=\sqrt{\frac{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}{2(n^2+q^2)}};$$

$$(12)\ a+b=n^2\sqrt{\frac{2(m^2-p^2)}{n^4-q^4}};\quad a-b=q^2\sqrt{\frac{2(m^2-p^2)}{n^4-q^4}};$$

Discussion. — Pour que le trapèze existe, il faut, comme on l'a vu plus haut, que les données satisfassent aux inégalités (2), (3), (4), et, par conséquent, aux inégalités (5), (6) et (7).

De (6) on déduit, en outre, en remarquant que n^2 et q^2 sont positifs :

$$(13)\qquad n^4 > q^4.$$

Nous supposerons donc toutes ces conditions remplies.

Les inégalités (6), (7) et (13) montrent d'abord que les valeurs données par les relations (11) et (12) sont réelles.

Considérons maintenant le triangle CEF, dont les côtés ont pour valeurs respectives $(a+b)$, f et g.

Les conditions de réalité de ce triangle sont :

$$(14)\qquad a+b+f>g,$$

$$(15)\qquad f+g>a+b,$$

$$(16)\qquad a+b+g>f.$$

La première de ces inégalités est une conséquence de l'hypothèse $f>g$.

La seconde équivaut à

$$(f+g)^2-(a+b)^2>0,$$

ou, d'après (10) et (12),

$$m^2+2fg-\frac{2n^4(m^2-p^2)}{n^4-q^4}>0,$$

ou, en multipliant par la quantité (n^4-q^4) qui, en vertu de (13), est positive :

$$2n^4p^2-n^4(m^2-2fg)-q^4(m^2+2fg)>0.$$

Substituant les valeurs de m^2, n^2, p^2, q^2, et supprimant le facteur positif $(f+g)^2$:

$$2(f-g)^2(c^2+d^2)-(f-g)^4-(c^2-d^2)^2>0$$

ou $$4(f-g)^2c^2-[(f-g)^2+c^2-d^2]^2>0,$$

ou finalement :

$$(f-g+c+d)(f-g+c-d)(d+f-g-c)(d-f+g+c)>0.$$

Les quatre facteurs sont positifs : les deux premiers, en vertu des hypothèses (1); le troisième, à cause de (4) et le quatrième à cause de (2). L'inégalité (15) est donc vérifiée.

L'inégalité (16) devient, par des transformations analogues :

$$(a+b)^2-(f-g)^2>0,$$

$$2n^4\frac{m^2-p^2}{n^4-q^4}-(m^2-2fg)>0$$

$$n^4(m^2+2fg)+q^4(m^2-2fg)-2n^4p^2>0.$$

Supprimant le facteur positif $(f-g)^2$:

$$(f+g)^4+(c^2-d^2)^2-2(f+g)^2(c^2+d^2)>0,$$

$$[(f+g)^2+c^2-d^2]^2-4(f+g)^2c^2>0,$$

$$(f+g+c+d)(f+g+c-d)(f+g-c+d)(f+g-c-d)>0.$$

Les quatre facteurs sont positifs : le second, le troisième et le quatrième en vertu, respectivement, des inégalités (1), (5) et (3).

Les conditions (14), (15), (16) sont donc remplies, et l'on peut construire un triangle CEF, en prenant CE égal à f, EF égal à g, et CF égal à $(a+b)$, a et b désignant les valeurs données par les formules (11). — Prenant ensuite sur CF une longueur CD égale à la valeur de b donnée par la formule (11), achevant les parallélogrammes CEDA, CEFB, et menant AB, on aura évidemment un trapèze ABCD, dont les diagonales seront égales à f et g, et les bases, aux valeurs de a, b, données par les formules (11).

Si l'on désigne les côtés obliques AC, BD, de ce trapèze, par c', d', ils satisferont aux relations analogues à (8) et (9), savoir :

$$(8')\qquad (f'^2+g^2)-(c'^2+d'^2)=2ab,$$

$$(9')\qquad \frac{f^2-g^2}{c'^2-d'^2}=\frac{a+b}{a-b},$$

Mais a et b satisfont, par hypothèse, aux relations (8) et (9). De ces dernières, jointes à (8') et (9'), on tire :

$$c^2+d^2=c'^2+d'^2$$

$$c^2-d^2=c'^2-d'^2,$$

d'où $\qquad c=c'$ et $d=d'$.

Il résulte de là que les conditions (2), (3), (4), dans les-

quelles c désigne le plus grand côté oblique, et f la plus grande diagonale, sont nécessaires et suffisantes pour que le problème proposé ait une solution, laquelle est, d'ailleurs, unique, puisque le triangle CEF est bien déterminé.

Solution géométrique. — Soient $f > g$, et $c > d$.

Dédoublons par la pensée le côté BD *(fig. 1)*, et, laissant fixe le trapèze ABCD, déformont le système articulé constitué par les tiges BC, BD, BF, EC, ED, EF, dont les longueurs respectives sont g, d, f, f, c, g.

Le jeu de ce système n'est limité que par les conditions

$$f - g \leqslant \mathrm{BE} \leqslant c + d,$$

qui sont réalisables à cause de (1) et (2), et qui, à cause de (3) et (4), sont nécessaires et suffisantes pour que les triangles BCE, BDE, ou leurs droites limites, puissent subsister.

Soit D′, E′, F′ *(fig. 2)* une position quelconque prise par les sommets D, E, F.

Des points C et D′ abaissons CH′, D′I′, perpendiculaires sur BE′, et appelons D″ l'intersection des droites CF′ et D′I′.

Le rapport $\frac{\mathrm{G'I'}}{\mathrm{G'H'}}$ ne dépendant, comme on l'a vu plus haut, que de la grandeur des côtés CB, CE′, D′B, D′E′, conserve une valeur constante. Il en est donc de même du rapport $\frac{\mathrm{D''G'}}{\mathrm{CG'}}$, et par conséquent aussi, du rapport $\frac{\mathrm{CD''}}{\mathrm{CF'}}$. Mais la valeur de ce dernier est précisément égale à $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CB}}$, comme on le voit *(fig. 1)* quand D″ coïncide avec D. Donc les triangles CO D″, CBF′, sont semblables et, de plus, leur rapport de similitude est constant, d'où il résulte que la droite OD″ est toujours parallèle à BF′, et conserve, comme cette dernière, une longueur invariable.

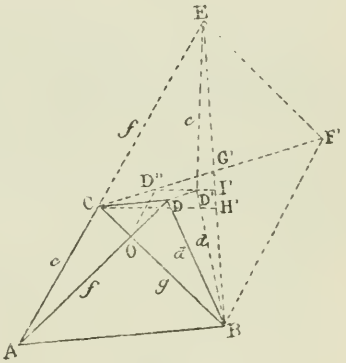


Fig. 2.

De là cette construction (*) : Sur une droite, juxtaposez deux longueurs BD′, D′E′, respectivement égales à d et à c, et construisez le triangle BCE′, en prenant BC égal à g, et CE′ égal à f.

Par le point D″ où la médiane CG′ de ce triangle rencontre la hauteur D′D″ du triangle évanouissant BD′E′, menez D″O parallèle à CE′, et qui coupe BC au point O.

Les points B et O comme centres, avec BD′ et OD″ pour rayons respectifs, tracez deux arcs de cercle qui se coupent au point D. Enfin, tirez DO, et sur cette droite prenez, dans le sens DO, une longueur DA égale à f. Le trapèze ABCD répond à la question.

Il faut remarquer que cette solution subsiste dans le cas particulier où $c = d$ et $f > g$, et aussi quand $c = d$ et $f = g$. Dans ce dernier cas, l'indétermination du problème se manifeste par celle du point D″.

Discussion. — Pour que le trapèze existe, il faut que les cercles décrits des centres B et O avec d et OD″ pour rayons respectifs se coupent. Mais, au lieu de discuter la possibilité du triangle BOD, nous allons prouver, par une autre méthode géométrique, que les conditions (2), (3), (4), jointes aux hypothèses (1), suffisent pour que le trapèze demandé soit réalisable.

Considérons *(fig. 3)* un quadrilatère articulé BD′E′F′, tel que

$$BD' = d, \quad D'E' = c,$$
$$BF' = f, \quad E'F' = g.$$

On a vu que ce quadrilatère peut être réalisé et se déformer, à la seule condition que la longueur BE′ ne soit pas supérieure à $(c + d)$, ni inférieure à $(f - g)$.

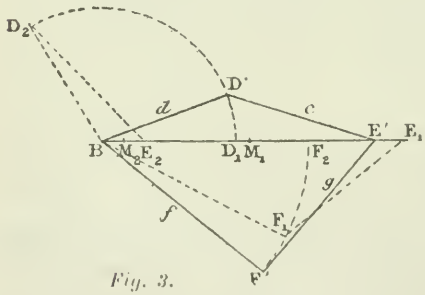


Fig. 3.

(*) Le principe de cette solution est dû à M. Louis Gérard, professeur au lycée de Lyon.

Sur la droite BE′ prenons, dans le sens BE′:

$$BD_1 = d, \qquad BE_1 = c + d, \qquad BM_1 = \frac{BE_1}{2}$$

$$BF_2 = f, \qquad BE_2 = f - g, \qquad BM_2 = \frac{BE_2}{2},$$

et désignons par M′ le milieu de BE′, et par G′ le point d'intersection des diagonales BE′, D′F′, du quadrilatère variable BD′E′F′.

Cela posé, fixons le sommet B, et faisons varier les angles du quadrilatère, en déplaçant le sommet E′ sur la droite fixe BE′.

Quand la longueur BE′ tend vers son maximum BE_1, les points M′ et D′ tendent respectivement vers M_1 et D_1, et le point G′ tend évidemment aussi vers D_1. Or D_1 est situé à gauche de M_1. Donc G′ se trouve, pendant un certain temps, à gauche de M′.

D'autre part, quand BE′ tend vers son minimum BE_2, les points M′ et F′ tendent respectivement vers M_2 et F_2, et le point G′ tend aussi vers F_2. Or F_2 est situé à droite de E_2 et, à plus forte raison, à droite de M_2. Donc G′ se trouve, pendant un certain temps, à droite de M′.

Mais il est évident que les points M′ et G′ se meuvent d'une manière continue sur la droite BE′; donc G′ n'a pu passer de la gauche à la droite de M′ sans coïncider avec lui à un certain instant. Par conséquent, il existe une forme du quadrilatère BD′E′F′, telle que D′F′ coupe BE′ en son milieu.

Soit BDEF *(fig. 1)* cette forme particulière. Sur le prolongement de FG, prenons une longueur GC égale à GF.

Le quadrilatère BCEF est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leurs milieux. D'ailleurs, la ligne brisée BCE est plus longue, par hypothèse, que la ligne brisée BDE. Le point C est donc situé à l'extérieur du triangle BDE.

Achevons encore le parallélogramme CEDA. Le quadrilatère ABFD sera aussi un parallélogramme, puisque les côtés AD et BF sont égaux à CE et lui sont parallèles. Par conséquent, ABCD est un trapèze répondant aux conditions demandées.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 273).

---

320. — *Le centre de gravité, le centre du cercle de Brocard, le centre de l'hyperbole de Jérabek et le point de Tarry sont quatre points en ligne droite.*

Il suffit de vérifier :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a\cos(A-\theta) & b\cos(B-\theta) & c\cos(C-\theta) \\ (b^2-c^2)^2\operatorname{cotg} A & (a^2-c^2)^2\operatorname{cotg} B & (a^2-b^2)^2\operatorname{cotg} C \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (b^2-c^2)^2\operatorname{cotg} A & (a^2-c^2)^2\operatorname{cotg} B & (a^2-b^2)^2\operatorname{cotg} C \\ \dfrac{1}{b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)} & \dfrac{1}{a^4+c^4-b^2(a^2+c^2)} & \dfrac{1}{a^4+b^4-c^2(a^2+b^2)} \end{vmatrix} = 0.$$

321. — *Une hyperbole équilatère circonscrite au triangle de référence est la transformée par points inverses d'une certaine droite* Δ, *et la transformée par points réciproques d'une autre droite* Δ'. *Lieu géométrique du point d'intersection de* Δ *et* Δ'.

On trouve aisément, pour le lieu, l'hyperbole de Jerabek, transformée par points inverses de la droite d'Euler OGH.

On peut généraliser.

Une conique circonscrite et passant par un quatrième point M est la transformée par points inverses d'une droite Δ, et par points réciproques d'une autre droite Δ', le lieu des points d'intersection de Δ et Δ' est une conique circonscrite qui passe par l'inverse et le réciproque de M.

Le lieu des points M tels que cette dernière conique est une hyperbole équilatère est l'hyperbole de Jerabek.

322. — *On considère la suite :* $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$

Sachant qu'on a la formule de récurrence :

$$u_n = xu_{n-1} + yu_{n-2},$$

calculer u_n *en fonction de* u_0, u_1, *et* n.

$$u_n = x^{n-1}u_1 + x^{n-2}yu_0 + (n-2)x^{n-3}yu_1 + (n-3)x^{n-4}y^2u_0$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}x^{n-5}y^2u_1 + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}x^{n-6}y^3u_0 + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}x^{n-7}y^3u_1$$
$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.}x^{n-8}y^4u_0 + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}x^{n-9}y^4u_1 + \ldots$$

Cette formule se démontre, en la vérifiant pour les premières valeurs de n, en la supposant vraie pour une valeur quelconque, et en la vérifiant pour la valeur suivante.

Pour les premières valeurs de n, on a

$$u_2 = xu_1 + yu_0$$
$$u_3 = x^2u_1 + xyu_0 + yu_1$$
$$u_4 = x^3u_1 + x^2yu_0 + 2xyu_1 + y^2u_0$$
$$u_5 = x^4u_1 + x^3yu_0 + 3x^2yu_1 + 2xy^2u_0 + y^2u_1$$
$$u_6 = x^5u_1 + x^4yu_0 + 4x^3yu_1 + 3x^2y^2u_0 + 3xy^2u_1 + y^3u_0$$
$$u_7 = x^6u_1 + x^5yu_0 + 5yx^4u_1 + 4x^3y^2u_0 + 6x^2y^2u_1 + 3xy^3u_0 + y^3u_1$$
$$u_8 = x^7u_1 + x^6yu_0 + 6x^5yu_1 + 5x^4y^2u_0 + 10x^3y^2u_1 + 6x^2y^3u_0 + 4xy^3u_1 + y^4u_0$$
$$u_9 = x^8u_1 + x^7yu_0 + 7yx^6u_1 + 6x^5y^2u_0 + 15x^4y^2u_1 + 10x^3y^3u_0 + 10x^2y^3u_1 + 4xy^4u_0 + y^4u_1$$
$$u_{10} = x^9u_1 + x^8yu_0 + 8x^7yu_1 + 7x^6y^2u_0 + 21x^5y^2u_1 + 15x^4y^3u_0 + 20x^3y^3u_1 + 10x^2y^4u_0 + 5xy^4u_1 + y^5u_0$$
$$u_{11} = x^{10}u_1 + x^9yu_0 + 9x^8yu_1 + 8x^7y^2u_0 + 28x^6y^2u_1 + 21x^5y^3u_0 + 35x^4y^3u_1 + 20x^3y^4u_0 + 15x^2y^4u_1 + 5xy^5u_0 + y^5u_1.$$

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(Juillet 1893).

Paris.

I. — 1° Dans un triangle rectangle ABC, on appelle α, β, γ les longueurs des médianes AA′, BB′, CC′. Calculer α connaissant β et γ. 2° Mener par un point donné des tangentes à une ellipse donnée. Discuter la question.

II. — Trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme et celle de leurs carrés. On prendra pour inconnues le nombre intermédiaire x et la raison y de la progression.

Travail d'une force constante en grandeur et en direction, appliquée à un point dont le déplacement est rectiligne. — Sa définition. — Unité de travail.

On demande de résoudre l'équation

$$4\cos^2 x - 2m\cos x - 1 = 0,$$

et de la discuter en regardant m comme un paramètre variable. — On rendra calculables par logarithmes les valeurs trouvées pour $\cos x$, en posant

$$\frac{2}{m} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Démontrer que la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs partant des foyers et aboutissant au point de contact : lieu des projections d'un foyer sur les tangentes à la courbe.

Académie de Montpellier.

I. — On considère un triangle dont les côtés sont : $a, b, c,$ et les angles respectivement opposés A, B, C. On demande de déterminer le produit k^2 des côtés b et c, la médiane m et la hauteur h qui partent du sommet A. On cherchera à obtenir d'abord l'angle A. On pourra se borner à discuter l'équation obtenue sous la condition que l'angle A existe et à indiquer ensuite comment l'on peut construire le triangle connaissant A, m et h.

II. — Un prisme a pour section droite un triangle équilatéral de côté donné. Déterminer un plan qui coupe ce prisme suivant un triangle ayant une surface donnée et dont un côté ait une longueur donnée. On demande de calculer les deux autres côtés du triangle et de discuter le problème.

Académie de Nancy.

I. *Compositions communes à tous les candidats. — Questions à choisir :* 1° Réduction d un nombre quelconque de forces appliquées à un corps solide, d'abord à trois forces, puis à deux; 2° Conditions d'équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe et sollicité par un nombre quelconque de forces. Application au levier; 3° Mouvement rectiligne varie. Définir la vitesse moyenne et la vitesse à un instant donné. Les déduire de la loi du mouvement et du diagramme de cette loi. Definir le mouvement rectiligne uniformément varié et l'accelération de ce mouvement.

II. *Problème.* — On considère un triangle isoscèle ABC dans lequel $AB = AC$. On donne la hauteur $AH = h$ et l'angle $BAC = 2\alpha$. On prend sur la hauteur AH, à partir de A, un segment $AM = x$. On abaisse de M les perpendiculaires MP, MQ, MH sur les trois côtés et on forme le triangle PQH.

1° Etudier la variation de la surface de ce triangle lorsque x varie;

2° On prend $x = \frac{h}{3}$. Déterminer l'angle α de telle sorte que la surface du triangle HPQ soit, dans ce cas, égale à m fois la surface du triangle ABC.

Académie de Rennes.

I. *Compositions communes à tous les candidats. — Questions à choisir :* 1° Etant donné le côté a d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence de rayon R, calculer les côtés des polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un nombre double de côtés. En déduire une methode pour le calcul de π; 2° Etablir les relations qui existent entre les coefficients et les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Montrer comment elles peuvent servir à calculer la somme des carrés ou des cubes des racines d'une équation du second degré; 3° Etablir les divers systèmes de relations distinctes qui existent entre les six éléments d'un triangle. Montrer comment on peut passer de l'un à l'autre.

II. *Problème.* — On donne une circonférence ABC de rayon R et deux rayons rectangulaires ox et oy indéfiniment prolongés. Dans l'angle droit

xoy on peut tracer deux circonférences tangentes à ses côtés et à la circonférence donnée, l'une intérieure et l'autre extérieure. Montrer que leurs rayons sont fournis par les deux racines convenablement interprétées d'une équation du second degré. Les construire géométriquement.

III. *Problème.* — Deux miroirs concaves A et B appartiennent à la même sphère, dont le centre est O et le rayon R. Une ligne lumineuse *mn* perpendiculaire à l'axe commun AB est placée à une distance du miroir A égale à R, les rayons émis par cette ligne se réfléchissent une première fois sur A, une seconde fois sur B, et forment une image.

On demande : 1° La distance de cette image au point B ; 2° Le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet.

QUESTION 382

Solution par Me Ve F. Prime.

Si dans un triangle on considère les quatre cercles tangents aux trois côtés dont les centres sont o, o_a, o_b, o_c; *et si* g, g_a, g_b, g_c *sont les quatre points de Gergonne de ces quatre cercles :*

1° Les quatre droites og, $o_a g_a$, $o_b g_b$, $o_c g_c$ *se coupent au symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit.*

2° Si s, s_a, s_b, s_c, *sont les points où ces quatre droites coupent une droite quelconque, le rapport anharmonique* $\frac{ss_b}{ss_c} : \frac{s_a s_b}{s_a s_c}$ *a pour valeur :* $\frac{b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)}$. (E. Lemoine.)

1° Si H′ est le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de la circonférence circonscrite, ses coordonnées normales valent

$$x : \cos A - \cos B . \cos C = \ldots$$

L'équation de *o*H′ est donc

$$\Sigma x(\cos C - \cos B) . \cos^2 \frac{A}{2} = o,$$

et comme cette équation est vérifiée par les coordonnées

$$x : \text{séc}^2 \frac{A}{2} = \ldots$$

du point de Gergonne *g*, la droite *og* passe bien par H′.

De même, l'équation de o_aH′ est

$$x\cos^2\frac{A}{2}(\cos C - \cos B) + y(\cos A + \cos C)\sin^2\frac{B}{2}$$
$$- z(\cos A + \cos B)\sin^2\frac{C}{2} = 0.$$

et elle est vérifiée par les coordonnées

$$-x : \text{séc}^2\frac{A}{2} = y : \text{coséc}^2\frac{B}{2} = z : \text{coséc}^2\frac{C}{2},$$

de g_a, la droite og_a contient aussi H′.

2° Coupons le faisceau $H'(o, o_a, o_b, o_c)$ par la bissectrice Ao, s vient en o, s_a en o_a et ainsi on a

$$Bs \equiv z - x = 0,$$
$$Bs_a \equiv z + x = 0,$$
$$Bs_b \equiv z - k_1 x = 0,$$
$$Bs_c \equiv z - k_2 x = 0,$$

d'où
$$\frac{ss_b}{ss_c} : \frac{s_a s_b}{s_a s_c} = \frac{1 - k_1}{1 - k_2} : \frac{1 + k_1}{1 + k_2}.$$

Or on trouve, par un calcul facile, que

$$\frac{1 - k_1}{1 - k_2} = \frac{b(p - b)^2(a - c)}{c(p - c)^2(a - b)},$$

et que

$$\frac{1 + k_1}{1 + k_2} = \frac{c(p - b)^2(a + b)}{b(p - c)^2(a + c)}.$$

On a donc bien

$$\frac{ss_b}{ss_a} : \frac{s_a s_b}{s_a s_c} = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)}.$$

QUESTION 442

Solution par Mme Ve F. Prime.

Le premier cercle de Lemoine *et le second cercle de* Lemoine *se coupent suivant un diamètre du second cercle, lequel passe par le point à l'infini, inverse du point de* Steiner *et est parallèle à l'axe radical du cercle de* Brocard *et du deuxième cercle de* Lemoine. (E. Lemoine.)

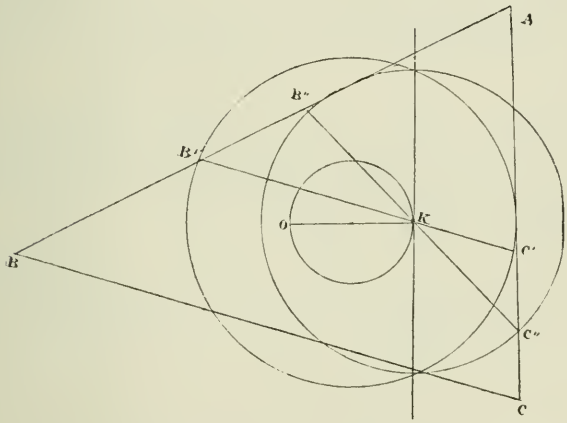
Le second cercle de Lemoine a pour centre le point de Lemoine K et le premier, le milieu de la droite KO qui joint le point de Lemoine au centre du cercle circonscrit. Leur axe radical est une perpendiculaire sur KO et, par suite, parallèle à la droite de Lemoine

$$(\delta_0) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Il passe donc par l'inverse du point de Steiner, car δ_0 est la figure inverse de l'ellipse de Steiner

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = 0.$$

Il est aussi parallèle à l'axe radical du second cercle de



Lemoine et du cercle de Brocard, puisque le cercle de Brocard est décrit sur KO comme diamètre.

Enfin, il sera un diamètre du second cercle de Lemoine, s'il contient le point K. Menons, par K, B'C' et B''C'' respectivement parallèle et antiparallèle à BC, dans l'angle A du triangle ABC, on a

$$KB'.KC' = KB''.KC''.$$

Mais B'C' est une corde du premier cercle de Lemoine et B''C'', une corde du second, donc...

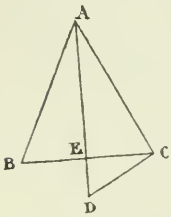
QUESTION 465

Solution par Mme Ve F. Prime.

On sait que $x - y$ *passe par un minimum, si* $\frac{x^m}{y^n} = k$, *lorsque* $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

Application. — *Parmi tous les triangles isoscèles de même périmètre, déterminer celui pour lequel le cercle circonscrit est maximum.* (Lauvernay.)

Soit le triangle isoscèle ABC de périmètre $2p$; en posant



$$AB = AC = b,$$

et

$$BC = 2a,$$

on a

$$b + a = p.$$

Si AE est la hauteur et AD le diamètre du cercle circonscrit, on a

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AE} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{p}.\sqrt{b - a}},$$

et ainsi, on est amené à déterminer le maximum de $\frac{b^2}{\sqrt{b - a}}$ ou le minimum de $\frac{b - a}{b^4}$.

Or

$$\frac{b - a}{b^4} = \frac{2b - p}{b^4} = \frac{2}{b^3} - \frac{p}{b^4}$$

et

$$\left(\frac{2}{b^3}\right)^4 : \left(\frac{p}{b^4}\right)^3 = 16 : p^3 = \text{Cte}.$$

Le minimum aura donc lieu pour

$$\frac{2}{b^3} : \frac{p}{b^4} = 4 : 3,$$

ou pour

$$b = \frac{2p}{3}.$$

Ainsi, il correspond au triangle équilatéral.

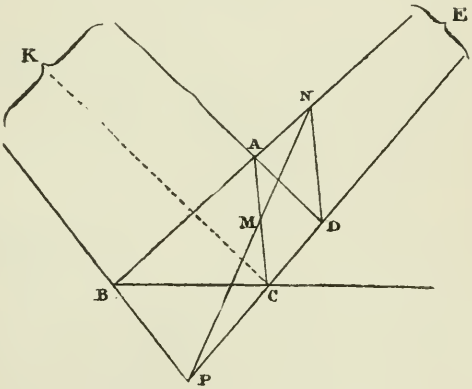
QUESTION 508

Solution par Mme Ve Prime.

La droite menée par le pôle d'un côté d'un triangle par rapport au cercle circonscrit et le milieu d'un second côté rencontre le troisième côté en un point également distant des tangentes menées au cercle circonscrit par les extrémités du second côté.

(Lauvernay.)

Soient P, le pôle de BC; M le milieu de AC; N, E les points où PM, PC coupent BA; et D le point de rencontre des tangentes PC, AD.



Le triangle ACE coupé par la transversale PN donne

$$\frac{AN}{NE} = -\frac{PC}{PE}.$$

Mais, C appartenant à la polaire de E, relativement aux droites AD, BP

$$\frac{PC}{PE} = -\frac{DC}{DE}.$$

Or, DC = AD; on a donc

$$\frac{AN}{NE} = \frac{AD}{DE},$$

et ainsi N est sur la bissectrice de l'angle ADE.

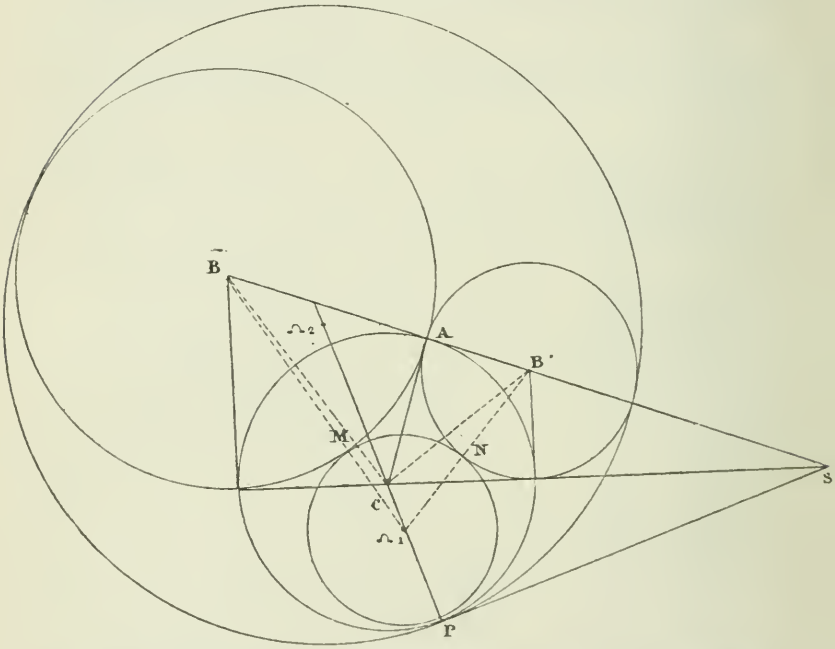
Nota. — Solutions diverses par MM. W. Greenstreet; Droz-Farny; Aletrop; Youssoufian; Grolleau.

QUESTION 510

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

On mène deux tangentes parallèles à une circonférence et une troisième tangente arbitraire BAB′ *rencontrant les premières en* B, B′; *on décrit les circonférences de centres* B *et* B′ *et de rayons* BA, BA′, A *étant le point de contact de* BB′.

Démontrer que les rayons des cercles tangents aux trois premiers



forment, avec celui de la première circonférence, une division harmonique. (Lauvernay.)

Soit C le centre de la première circonférence. Nous savons que AC est perpendiculaire sur BB′ et que la longueur de cette droite est égale au rayon de la circonférence C. Dési-

gnons par R, r les rayons des circonférences de centres B et B'; on a $Ac = \sqrt{Rr}$.

Remarque. — Avant de traiter le problème, nous ferons remarquer, comme dans la solution n° 506, que les cercles Ω_1 et Ω_2 sont tangents au même point P au cercle C et que par suite les points P, C, Ω, et Ω_2 sont en ligne droite.

Cette remarque faite, désignons par α, β, γ les angles respectifs $B\Omega_1P'$, $B'\Omega_1P$, $B\Omega_1P$. Dans le triangle $B\Omega_1B'$, on a :

$$(R + r)^2 = (R + x)^2 + (r + x)^2 - 2(R + x)(r + x)\cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + (R + r)x - Rr}{(x + R)(x + r)}. \quad (x, \text{ rayon de la circonférence } \Omega_1.)$$

Dans le triangle $B'\Omega_1C$, on a :

$$r^2 + Rr = (\sqrt{Rr} - x)^2 + (r+x)^2 + 2(\sqrt{Rr} - x)(r + x)\cos\beta,$$

d'où

$$\cos\beta = \frac{x^2 + (r - \sqrt{Rr})x}{(x + r)(x - \sqrt{Rr})}.$$

Enfin, dans le triangle $B\Omega_1C$, on a :

$$R^2 + Rr = (R + x)^2 + (\sqrt{Rr} - x)^2 + 2(R + x)(\sqrt{Rr} - x)\cos\gamma,$$

d'où

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + (R - \sqrt{Rr})x}{(x + R)(x - \sqrt{Rr})},$$

et, d'après la relation

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

l'équation du problème est

$$(1)\quad \begin{cases} [x^2+(R+r)x-Rr]^2(x-\sqrt{Rr})^2+x^2[x+(r-\sqrt{Rr})]^2(x+R)^2 \\ +x^2[x+(R-\sqrt{Rr})]^2(x+r)^2 - 2x^2[x^2+(R+r)x-Rr] \\ [x+(r-\sqrt{Rr})][x+(R-\sqrt{Rr})]=(x+R)^2(x+r)^2(x-\sqrt{Rr})^2, \end{cases}$$

équation qui se réduit, après des calculs assez longs, mais ne présentant aucune difficulté, à la suivante :

$$[4\sqrt{Rr} + R + r]x^2 - 4Rrx = 0.$$

La racine $x = 0$ correspond au cercle de rayon nul, de centre A; l'autre racine est

$$x_1 = \frac{4Rr}{4\sqrt{Rr} + R + r},$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad \frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{Rr}} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{4r}.$$

En employant une méthode analogue pour calculer le rayon de la circonférence Ω_2, on trouve

$$\cos\alpha = \frac{x^2-(R+r)x-Rr}{(x-R)(x-r)}, \qquad \cos\beta = \frac{x^2-(r+\sqrt{Rr})x}{(x-r)(x-\sqrt{Rr})},$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2-(R+\sqrt{Rr})x}{(x-\sqrt{Rr})(x-R)},$$

les cosinus diffèrent des précédents par le changement de $+R$ en $-R$ et de $+r$ en $-r$; l'équation du problème s'obtient en changeant dans (1) $+R$ en $-R$ et $+r$ en $-r$, par suite on trouve pour valeur du rayon x_2,

$$x_2 = \frac{4Rr}{4\sqrt{Rr}-R-r};$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{Rr}} - \frac{1}{4R} - \frac{1}{4r};$$

en additionnant membre à membre (2) et (3), on obtient

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{\sqrt{Rr}},$$

qui est la formule demandée.

Cette formule peut s'écrire, d'après la remarque précédente,

$$\frac{1}{P\Omega_1} + \frac{1}{P\Omega_2} = \frac{2}{PC}.$$

et les points P, C, Ω_1, Ω_2 forment une division harmonique.

Nota. — M. Foucart, élève au lycée Michelet, nous a adressé une autre solution basée sur l'*inversion*.

QUESTION 511

Solution par M. de Times.

Étant données trois droites concourantes $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ *et la transversale* $\alpha\beta\gamma$, *on a la relation*

$$\frac{\sin\alpha S\gamma}{S\beta} = \frac{\sin\beta S\gamma}{S\alpha} = \frac{\sin\alpha S\beta}{S\gamma}.$$

Corollaire. — AD *étant la bissectrice intérieure de l'angle* A *d'un triangle, on a*

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}A}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \qquad (*)$$

(Lauvernay.)

On a : aire $\alpha S\gamma$ = aire $\alpha S\beta$ + aire $\gamma S\beta$,

ou $S\alpha . S\gamma . \sin \alpha S\gamma = S\alpha . S\beta \sin \alpha S\beta + S\beta . S\gamma \sin \beta S\gamma$;

et, en divisant les deux membres de cette égalité par le produit $S\alpha . S\beta . S\gamma$.

$$(1) \qquad \frac{\sin \alpha S\gamma}{S\beta} = \frac{\sin \alpha S\beta}{S\gamma} + \frac{\sin \beta S\gamma}{S\alpha}$$

Corollaire. — Si AD est la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC, l'égalité (1) devient

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{AD} = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{c}.$$

ou

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}A}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille ; Aletrop, à Madrid ; E. Foucart, élève au lycée Michelet; Youssoufian, à Constantinople ; W.-J. Greenstreet ; Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy.

QUESTION 519

Solution par M. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

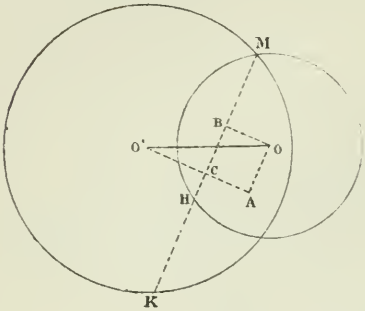
Si par le point de rencontre de deux circonférences on mène une corde inclinée de 60° sur la ligne des centres, la longueur totale de cette corde interceptée par les deux circonférences est égale à la distance des centres. (E.-N. Barisien.)

(*) L'égalité de la page 119 est écrite

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}A}{AD} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

elle se rapporte à la bissectrice extérieure.

Soient OO′ et les centres des deux circonférences, M un de leurs points d'intersection, H et K les points où la droite inclinée à 60° sur la ligne des centres et passant par M, rencontre respectivement les circonférences O et O′, B le milieu de MH et C le milieu de MK.



Par le centre O d'une des circonférences menons OA parallèle à la corde; puis O′A perpendiculaire sur OA.

On a $$OA = BC = MC - MB = \frac{MK - MH}{2} = \frac{KH}{2}.$$

Mais, puisque $\widehat{AOO'} = 60°$, OA est la moitié de OO′; donc, etc...

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy; de Times, Youssoufian, de Constantinople; César Spino.

QUESTIONS PROPOSÉES

552. — Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point O tel que les trois circonférences AOB, BOC, COA se coupent mutuellement sous des angles donnés. *(M. Fouché.)*

553. — Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points est parallèle au côté moyen.

(E. Foucart.)

Le Directeur-gérant,
G. de LONCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8500-5-94.

NOTE SUR LE DODÉCAÈDRE ET L'ICOSAÈDRE

RÉGULIERS CONVEXES

Par M. **Joseph Cernesson**, professeur au lycée de Sens.

I. Dodécaèdre.

J'établirai d'abord deux propriétés du pentagone régulier convexe.

Soient un pentagone régulier convexe ABCDE et le cercle circonscrit O, de rayon R. Abaissons, du sommet A, la perpendiculaire AI sur le côté BC prolongé; elle rencontre l'arc AB en son milieu a, comme il est aisé de le voir.

1° La différence $\overline{AI}^2 - \overline{aI}^2$

est égale au carré du rayon.

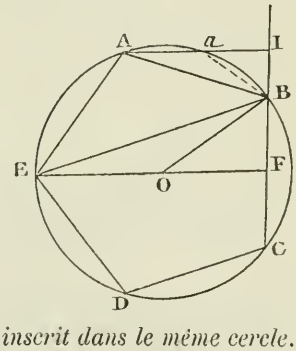
En effet, joignons aB. On a dans les triangles rectangles aIB, AIB

$$\overline{IB}^2 = \overline{aB}^2 - \overline{aI}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AI}^2,$$

d'où $\overline{AI}^2 = \overline{aI}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{aB}^2$.

Or, $\overline{AB}^2 - \overline{aB}^2 = R^2$,

d'après cette propriété bien connue du pentagone régulier convexe :



Le côté du pentagone régulier convexe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, ayant pour côtés de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit, et le côté du décagone régulier convexe inscrit dans le même cercle.

On a donc : $\overline{AI}^2 - \overline{aI}^2 = R^2$.

2° La différence $\overline{EF}^2 - \overline{OF}^2$

est égale au carré du côté du décagone régulier *concave* inscrit dans le même cercle.

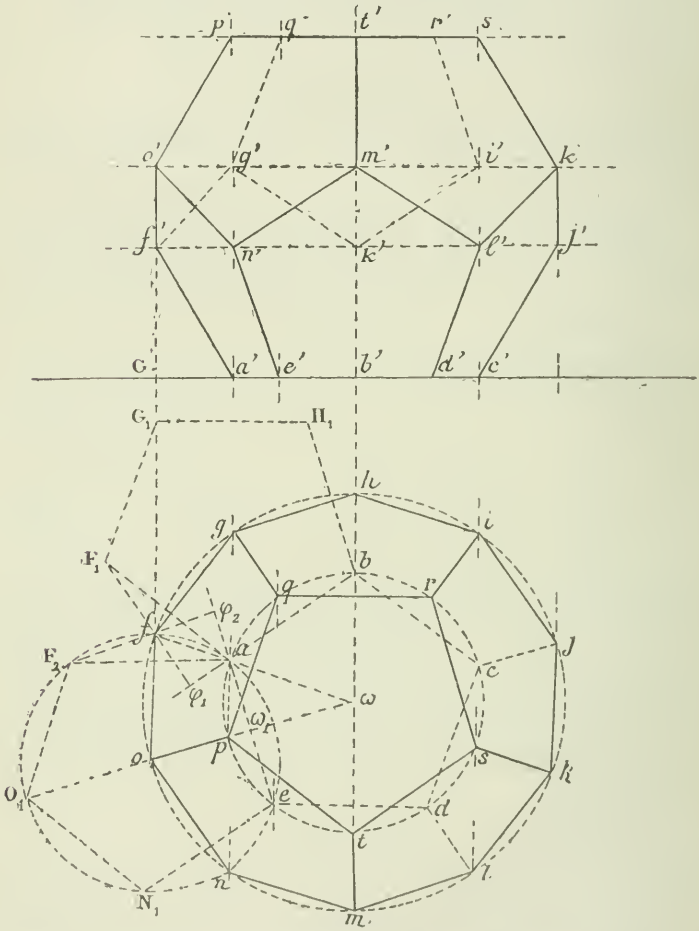
Joignons EB, OB. Les triangles rectangles OBF, EBF donnent :

$$\overline{BF}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{EF}^2,$$

d'où $$\overline{EF}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{OB}^2.$$

Or, la différence $\overline{EB}^2 - \overline{OB}^2$,
est égale au carré du côté du décagone régulier *concave* inscrit dans le même cercle. On sait, en effet, que :

Le côté du pentagone régulier concave *est l'hypoténuse d'un*



triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit, et le côté du décagone régulier concave *inscrit dans le même cercle.*

Ces propriétés établies, soient les projections horizontale et verticale d'un dodécaèdre régulier convexe, reposant par une de ses faces *abcde* sur le plan horizontal; *de* étant supposé parallèle à la ligne de terre. Soient $abH_1G_1F_1$, $abF_2O_1N_1$ les rabattements horizontaux de deux faces consécutives de la corbeille inférieure.

Soient encore f, o les projections horizontales des points F et O; f est le point de croisement des perpendiculaires $F_1\varphi_1$, $F_2\varphi_2$ respectivement abaissées des points F_1, F_2 sur ab et sur ae. Il est aisé de voir que o est le centre du cercle circonscrit au pentagone $aeN_1O_1F_2$. On sait d'ailleurs que o, f sont les sommets d'un décagone régulier inscrit dans un second cercle ω, concentrique de celui qui a servi à construire *abcde*. Enfin, F_2f, af sont des côtés du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle o.

La cote du point F est le troisième côté d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse $F_2\varphi_2$, distance de F_2 à ae, et pour côté de l'angle droit $f\varphi_2$. On a donc

$$\overline{f'\varphi}^2 = \overline{F_2\varphi_2}^2 - \overline{f\varphi_2}^2;$$

par conséquent, d'après la première propriété démontrée plus haut

$$\overline{f'\varphi}^2 = \overline{oO}^2 - \overline{\omega a}^2$$

d'où

$$f'\varphi = \omega a.$$

D'autre part, la cote du point O est le troisième côté d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse $o_1\omega_1$, distance de O_1 à ae, et pour côté de l'angle droit $o\omega_1$.

On a donc

$$\overline{o'\varphi}^2 = \overline{O_1\omega_1}^2 - \overline{o\omega_1}^2;$$

par conséquent, d'après la seconde propriété démontrée plus haut, $o'\varphi$ est le côté du décagone régulier *concave* inscrit dans le centre o ou le cercle ω.

$o'f'$, différence de $o'\varphi$ et de $f'\varphi$, est donc le côté du décagone régulier *convexe* inscrit dans le cercle ω, puisque $f'\varphi = \omega a$.

Il résulte de là que, pour exécuter l'épure, tous les rabattements deviennent inutiles.

Épure. — On tracera d'abord le petit cercle ω, les deux pentagones *abcde*, *pqrst*. On prendra le symétrique o de ω

par rapport à ae; puis on tracera le grand cercle ω avec $o\omega$ pour rayon. En joignant ωa, ωb...; ωp, ωq... on obtiendra les sommets f, h...; o, g... du décagone régulier $ofgh$... On achèvera aisément la construction de la projection horizontale du solide.

On tracera ensuite trois parallèles à la ligne de terre, $f'j'$; $o'k'$; $p's'$; la première distante de xy d'une longueur égale à ωa; la seconde distante de $f'j'$ d'une longueur égale au côté ap du décagone régulier convexe inscrit dans le petit cercle ω; la troisième distante de $o'k'$ d'une longueur égale à ωa. Des lignes de rappel donneront enfin les projections verticales des sommets, situées sur ces trois lignes, et sur xy.

La simplification est notable, et elle méritait, croyons-nous, d'être signalée. On objectera que les constructions de la géométrie descriptive ne doivent emprunter à la géométrie pure que les considérations les plus simples. Mais, dans le cas actuel, les constructions assez pénibles que l'on exécute pour trouver les cotes des points F et O aboutissent à déterminer des lignes qui existent déjà sur l'épure : ωa et ap.

Application. — *Calcul du côté* a *du dodécaèdre régulier convexe en fonction du rayon* ρ *de la sphère circonscrite.*

Soient R le rayon du petit cercle ω, d la distance du centre de la sphère circonscrite au plan de la face $abcde$. On a

$$\rho^2 = d^2 + R^2, \tag{1}$$

Or, d est la moyenne arithmétique des distances $m'b'$, $k'b''$ et l'on a vu que

$$m'b' = \frac{R(\sqrt{5}+1)}{2} \qquad k'b' = R.$$

Donc

$$d = R\frac{(3+\sqrt{5})}{4}$$

d'où, en portant dans (1)

$$\rho^2 = \frac{R^2(30+6\sqrt{5})}{16}. \tag{2}$$

D'autre part,

$$\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4} = a^2. \tag{3}$$

Multiplions (2) et (3) membre à membre; puis, résolvons par rapport à a; nous avons successivement

$$\frac{\rho^2(10 - 2\sqrt{5})}{4} = \frac{a^2(30 + 6\sqrt{5})}{16},$$

$$a^2 = \frac{4\rho^2(5 - \sqrt{5})}{3(5 + \sqrt{5})} = \frac{\rho^2(6 - 2\sqrt{5})}{3}$$

$$= \frac{\rho^2(\sqrt{5} - 1)^2}{3},$$

$$(4) \qquad a = \frac{\rho\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{3}.$$

(A suivre.)

SUR LA THÉORIE DES AMORTISSEMENTS

ET DES ANNUITÉS

Par **M. Aubry.**

Plusieurs traités d'arithmétique mentionnent la méthode d'extraction des racines carrées rappelée par nous *(J. M. E.*, 1893, p. 155), comme une application de la relation

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1} \qquad (*).$$

D'après la démonstration très élémentaire que nous avons donnée de son extension au cas général, nous croyons que cette extension pourrait être introduite dans les éléments, de même que la résolution de l'équation $x^m + px = q$, qui est du même ordre de difficulté.

Voici un exemple de l'usage de cette méthode tirée de l'arithmétique élémentaire elle-même.

Toutes les questions relatives aux amortissements et aux

(*) Dans l'article en question, nous avons omis de dire que Mac Laurin *(A Treatise of Fluxions*, Edinburg, 1742), est l'auteur de cette remarquable relation. Cauchy l'a étendue au cas de m fractionnaire.

annuités reviennent à la considération des formules connues

$$(\alpha) \qquad c = \frac{a(1+r)^n - a}{r(1+r)^n},$$

$$(\alpha') \qquad C = \frac{a(1+r)^n - a}{r}$$

où c représente le capital actuel à amortir, C le capital produit par l'accumulation des annuités, r l'intérêt par unité de temps, et t le temps. Les diverses questions que suggèrent ces formules sont faciles à traiter tant que n n'est pas l'inconnue; mais, dans le cas contraire, en posant pour plus de facilité $1 + r = x$, on a à résoudre les équations

$$(\beta) \qquad cx^{n+1} - (c+a)x^n + a = 0,$$

$$(\beta') \qquad ax^n - Cx + C - a = 0.$$

qui peuvent être résolues par le procédé que nous avons indiqué. On remarquera que l'équation (β) se ramène au cas général de deux manières : en posant $x = \sqrt[n]{z}$, ou $x = \frac{1}{z}$.

On peut trouver une première approximation — souvent suffisante en pratique — par les formules suivantes, dues à Halley:

On pose dans le premier cas

$$\left(\frac{C}{an}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 1 + y, \qquad \frac{6}{n+1} = b,$$

et dans le second

$$\left(\frac{an}{c}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 1 + y, \qquad \frac{6}{n-1} = b,$$

et on aura très approximativement suivant les cas

$$r = \sqrt{b^2 + 2by} - b, \qquad r = b - \sqrt{b^2 - 2by}.$$

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 108).

323. — *Trouver tous les nombres qui sont à la fois triangulaires et carrés.*

Ces nombres sont de la forme $x^2(2x^2 \pm 1)$, où $2x^2 \pm 1$ est un carré parfait.

On a donc à résoudre les équations bien connues :

(1) $$2x^2 + 1 = k^2,$$

(2) $$2x^2 - 1 = k'^2.$$

Or, si l'on considère la suite :

$$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 5 \quad \alpha_4 = 12 \quad \alpha_5 = 29\ldots$$

où la loi de récurrence est :

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2},$$

(Voir *J. M. S.*, année 1893, p. 139), les solutions de (1) et (2) sont respectivement :

$$x = \alpha_{2n}, \qquad k = \alpha_{2n} + \alpha_{2n-1};$$
$$x = \alpha_{2n+1}, \qquad k' = \alpha_{2n+1} + \alpha_{2n}.$$

Ces solutions sont d'ailleurs indépendantes, car :

$$\alpha_n = 6\alpha_{n-2} - \alpha_{n-4}.$$

Les nombres cherchés sont donc tous compris dans la formule :

$$\alpha_n^2(\alpha_n + \alpha_{n-1})^2.$$

On trouve ainsi

$$1 \;.\; 36 \;.\; 1225 \;.\; 41616 \;.\; 1413721 \quad \text{etc...}$$

On peut remarquer que les nombres k peuvent s'écrire :

$$\alpha_{2n} + \alpha_{2n-1} = 4\alpha_{n+1}^2 \pm 1;$$

$+$ pour n impair, $-$ pour n pair. Ces nombres k ne peuvent donc jamais être carrés.

L'équation $2x^2 + 1 = y^4$ est donc impossible en nombres entiers; remarque déjà faite par M. de Longchamps (*J. M. E.*, 1883).

Les nombres k' satisfont à la relation :

$$\left(\frac{k'+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{k'-1}{2}\right)^2 = \alpha_{2n+1}^2.$$

Ils fournissent la solution générale de

$$x^2 + (x+1)^2 = z^2.$$

324. — *La somme de deux triangulaires consécutifs est un carré.*

325. — *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$3x^2 + 1 = y^2.$$

On a $x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 15 \quad x_4 = 26 \quad x_5 = 209\ldots$

$y_0 = 1 \quad y_1 = 2 \quad y_2 = 7 \quad y_3 = 26 \quad y_4 = 97 \quad y_5 = 362\ldots$

en général $$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$$
$$y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2} = 2x \quad - x_{n-1}.$$

326. — *Résoudre en nombres entiers les équations*

(1) $$5x^2 + 1 = k^2,$$

(2) $$5x^2 - 1 = k^2.$$

Considérons les suites :

$$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 4 \quad \alpha_3 = 17 \quad \alpha_4 = 72\ldots$$
$$\beta_0 = 1 \quad \beta_1 = 2 \quad \beta_2 = 9 \quad \beta_3 = 38 \quad \beta_4 = 161\ldots$$
$$\alpha_n = 4\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2},$$
$$\beta_n = 4\beta_{n-1} + \beta_{n-2} = 2\alpha_n + \alpha_{n-1}.$$

Toutes ces solutions de (1) sont :

$$x = \alpha_{2n}, \quad k = \beta_{2n},$$

et les solutions de (2) sont

$$x = \alpha_{2n+1}, \quad k = \beta_{2n+1}.$$

On peut d'ailleurs les séparer, car

$$\alpha_p = 18\alpha_{p-} - \alpha_{2p-4}, \quad \beta_p = 18\beta_{p-2} - \beta_{p-4}.$$

CORRESPONDANCE

Extraits d'une lettre de M. Bernès :

« ... En me reportant à la lettre de M. Lemoine (p. 83), il me semble que la forme *la plus simple* (dans tous les sens) de la construction de la tangente à l'ellipse, en M, quand les foyers F, F′ sont donnés, est celle-ci : *Sur une parallèle menée par* F *à* F′M *on porte* FP = FM, MP *est la tangente.*

» Si l'on trace FP avec l'équerre, on gagne au moins deux points sur la simplicité 13 donnée par M. Lemoine. Si l'on n'emploie que la règle et le compas, on a exactement le même symbole opératoire que M. Lemoine. On trace F′M, on décrit F(FM), M(FM) qui coupe F′M en Q, Q(FM) qui coupe F(FM) en P, on joint MP. Symbole $2\delta_2 + \gamma_2 + 2\gamma_1$ simplicité 13, exactitude 8.

Cette construction a sur l'autre un avantage; car, appliquée au cas de la parabole, elle donne la construction certainement la plus simple : *Sur l'axe vers la directrice on prend* FP = FM *et on joint* PM. La simplicité est ici réduite à 6.

» ... A propos du mémoire de Besançon, auquel M. Lemoine fait allusion dans sa note, je serais curieux d'y voir cette construction qui donne les deux points de Brocard avec la simplicité 32. J'ai adressé, il y a quelques mois, à M. Lemoine, comme constituant une simplification notable sur son ancienne construction, la construction qu'il développe, dans sa note, pour obtenir un des points de Brocard et où il fait usage d'un des cercles adjoints. La simplicité est 24, au lieu de 28, qu'exigeait l'ancienne, et pour les deux points, il faut 36, au lieu de 38.

» Je serais bien surpris que, tout bien regardé, la méthode du cercle adjoint ne reste pas *la plus simple* pour obtenir un des points de Brocard. Du reste, je suis persuadé que plus

une construction est *simple* géométrographiquement, plus est *simple* l'énoncé dont elle est susceptible. Et, retournant la phrase qui termine la lettre de M. Lemoine, je dirai que le géométrographe ayant trouvé une construction simple, il lui reste *une autre chose à faire*, c'est d'en trouver un énoncé simple. Ce n'est qu'à cette condition que la géométrographie prouvera son utilité et s'imposera. »

BIBLIOGRAPHIE

Les femmes dans la Science, par A. Rebière (Librairie Nony, prix : 1 fr. 50 c).

Cette brochure de 85 pages est la reproduction de la conférence faite par notre bien sympathique collègue, au cercle Saint-Simon, le 24 février dernier. Le but que s'est proposé M. Rebière en faisant cette conférence, qui a eu un très grand succès, est de compléter par un point, et non des moins intéressants, le livre qu'il a intitulé *Mathématiques et Mathématiciens*. Les femmes qui se sont adonnées aux sciences exactes sont peu nombreuses; pourquoi? C'est un point que l'auteur n'a pas soulevé; par galanterie peut-être? Du quatrième siècle après Jésus-Christ à nos jours, M. Rebière en a compté juste une demi-douzaine et, autant que je sache, il n'en a pas oublié. C'est peu, à voir exactement les choses, Mais je ne crois pas que ces exceptions, si honorables qu'elles soient, permettent d'affirmer que les femmes aient eu, à un moment quelconque, une influence véritable sur le mouvement scientifique qu'elles ont suivi quelquefois, il est juste de le reconnaître, comme Sophie Germain et Sophie Kowalevski, avec talent et succès. Mais je dois dire que M. Rebière ne partage nullement cette opinion, et qu'il rêve d'écrire, il le dit à la fin de sa brochure, un livre où il rassemblera tous les documents intéressant la vie et les travaux des femmes scientifiques. Je souhaite, d'avance, bon succès à ce nouveau livre qui me donnera peut-être sur ce sujet une opinion meilleure et plus exacte. *G. L.*

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(Juillet 1893).

(*Suite*, voir page 109).

Académie de Toulouse.

I. — *Composition unique.* — *Question obligatoire.* — Sur une droite AB de longueur $2a$ on prend un point M entre A et B. Sur AM et sur MD comme diamètres on décrit d'un même côté de la droite deux demi-

circonférences et on leur mène la tangente commune extérieure qui les touche respectivement en C et D.

Déterminer le point M de façon que la surface engendrée par la ligne ACDB en tournant autour de AB soit égale à $4K\pi a^2$, K désignant une constante donnée.

II. — *Question obligatoire.* — 1° Étudier la variation de la fonction :

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}.$$

2° On considère toutes les paraboles qui ont une même directrice donnée et sont tangentes à une seconde droite donnée. Trouver : 1° le lieu géométrique de leurs foyers ; 2° le lieu géométrique de leurs sommets.

Académie de Lille.

Questions à choisir : A. 1° Établir la condition nécessaire et suffisante pour que deux points a et a', pris sur une épure, soient les projections d'un point A de l'espace; 2° Déterminer la nouvelle projection verticale a'_1 de A, quand on change le plan vertical en conservant le plan horizontal; 3° Mener, par un point donné m, m', une parallèle à une droite, située dans un plan de profil, et donnée par les projections aa' bb' de deux de ses points.

B. 1° Déterminer le rabattement M_1 d'un point M pris dans un plan P quand on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale, pour le rabattre sur le plan horizontal; 2° Dire comment doit être modifiée la construction précédente, quand on fait tourner le plan P autour de l'une de ses horizontales, pour le rabattre sur un plan parallèle au plan horizontal; 3° Déterminer l'angle des deux droites, dans le cas où l'une d'elles est parallèle au plan horizontal.

C. 1° Établir la condition nécessaire et suffisante pour que, sur une épure, une droite soit perpendiculaire à un plan (on considérera comme démontré le théorème relatif à la projection d'un angle droit sur un plan parallèle à l'un de ses côtés et sa réciproque); 2° Expliquer pourquoi le résultat obtenu est en défaut quand le plan P est parallèle à la ligne de terre, étudier directement ce cas; 3° Déterminer la distance d'un point donné m, m' à une droite donnée ab, $a'b'$, dans le cas où la projection horizontale ab de cette droite est parallèle à la ligne de terre.

Problème obligatoire : On considère deux cercles mobiles dans le plan d'un angle droit yOx. Le premier, de rayon donné a, doit rester tangent à Ox, le second, de rayon donné b, doit rester tangent à Oy. Les deux cercles doivent, de plus, être tangents extérieurement et chacun d'eux doit être tout entier dans l'angle yOx. — Déterminer les positions du système pour lesquelles la somme OA + OB des longueurs des tangentes menées du point O aux deux cercles est égale à une longueur donnée c. — Discuter le problème, en supposant $b = 2a$.

Académie de Rennes.

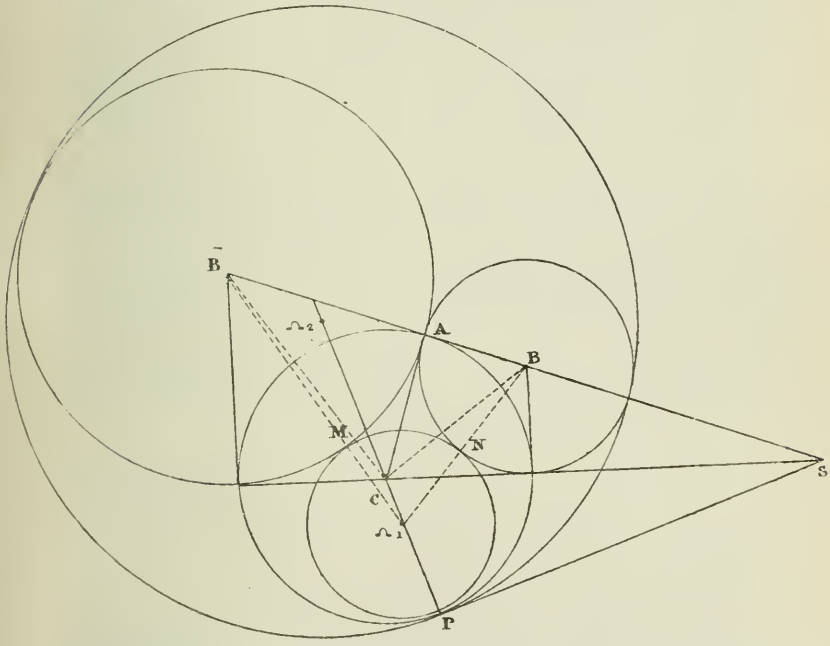
I. — Calcul de π par la méthode des isopérimètres.

II. — Un triangle ABC tourne autour d'une perpendiculaire à son plan menée par le sommet A. Étudier la variation de la somme des projections des côtés AB, AC sur une droite xy menée par le point A dans le plan du triangle. Prendre comme variables $\widehat{CAC'} = \alpha$, $BAC = A$, $AC = b$, $AB = c$.

QUESTION 510 (*).

Solution géométrique et remarques, par un ancien élève de mathématiques spéciales.

Considérons P comme un cercle point. On peut dire que les circonférences Ω_1, Ω_2 sont tangentes aux cercles B, B′ et P; et que la circonférence C est orthogonale à ces mêmes courbes. Comme on l'a fait remarquer p. 117, les circonférences C, Ω_1, Ω_2 sont tangentes entre elles au point P. Les



circonférences Ω_1, Ω_2 ont alors ce point pour centre de similitude; l'autre centre de la similitude est le centre C de la circonférence qui coupe orthogonalement les cercles B, B′ P. Les points P, Ω_1, C, Ω_2, forment alors une division harmonique en vertu d'un théorème connu.

(*) Voyez l'énoncé, avec la solution donnée, dans le numéro dernier, p. 116.

La proposition ainsi démontrée est relative à des circonférences particulières, tant au point de vue de leurs grandeurs que de leur position.

Il est alors naturel de chercher la proposition qui la comprend et qui concerne trois cercles arbitraires.

J'ai déjà eu l'occasion, à propos du problème d'Apollonius, de recourir à une figure de l'espace. C'est encore ainsi que je vais opérer pour arriver rapidement au résultat cherché.

Soient une sphère et trois de ses petits cercles. Ces cercles sont deux par deux sur des cônes dont les sommets sont trois par trois sur quatre droites. Pour fixer les idées, prenons seulement les cônes dont les sommets sont extérieurs à la sphère. On a ainsi trois sommets sur une droite S, qui est l'axe radical commun aux cercles suivant lesquels la sphère est coupée par des plans passant par S.

Considérons en particulier parmi ces plans ceux qui sont tangents aux cônes. Ils coupent la sphère suivant deux cercles tangents aux trois cercles donnés. Désignons par b et b' les sommets des cônes circonscrits à la sphère suivant ces deux cercles. Prenons aussi le plan (P) mené par S et qui est le plan polaire, par rapport à la sphère, du point o commun aux plans des trois petits cercles donnés. Ce plan (P) coupe la sphère suivant un cercle O qui rencontre orthogonalement les trois petits cercles de la sphère.

Les points b, o, b', appartiennent à la droite Σ polaire de S et cette polaire rencontre (P) en un point s qui est le pôle de S par rapport au cercle O : *les points* b, o, b′, S *forment une division harmonique.*

Cela est vrai, quel que soit le rayon de la sphère. Mais, lorsque ce rayon est infini. S est un axe de similitude des cercles donnés et s est toujours le pôle de cette droite par rapport à O qui coupe encore ces cercles à angle droit. On a alors cette propriété :

On donne sur un plan trois circonférences de cercles. On prend un de leurs axes de similitude S *et les circonférence de centre* b, b′ *qui les touchent de la même manière,* S *étant l'axe radical de ces dernières circonférences. Enfin, on prend* s *pôle de* S *par rapport*

à la circonférence O *de centre* o *qui coupe orthogonalement les cercles donnés : les points* b, o, b′, s *forment une division harmonique.*

La démonstration directe de cette propriété est très simple. Prenons un axe de similitude S′ des circonférences données qui coupe O. Appelons t l'un des points d'intersection. On sait que le centre de O est un centre de similitude des circonférences de centres b, b'. Les rayons de ces circonférences sont alors proportionnels à ob, ob' : par suite la droite to est la bissectrice de l'angle btb'. La tangente en t à O, qui est perpendiculaire à to, forme alors un faisceau harmonique avec les droites tb, to, tb'. Ce faisceau rencontre la droite bb' en des points qui forment une division harmonique. Mais la tangente en t à O passe par le pôle s' de S′ par rapport à O, la proposition est donc démontrée directement.

Remarque. — Les centres b, b' des circonférences tangentes aux cercles donnés et leurs centres de similitude forment une division harmonique. Mais l'un de ces centres de similitude est o, donc l'autre doit être s'.

Ainsi : *les circonférences* b, b′, *qui touchent trois cercles donnés de la même manière, ont pour centres de similitude le centre* o *de la circonférence* O *orthogonale à ces cercles et le pôle de leur axe radical par rapport à* O.

QUESTION 512

Solution par M. W. J. Greenstreet (M. A.).

Résoudre l'équation

$$2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x.$$

(Lauvernay.)

On peut mettre l'équation sous la forme

$$\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg}^4 x + 2 = 0,$$

dont les racines sont 1, 1 — 2.

On a donc

1° $$x = n\pi + \frac{\pi}{4},$$

2° $$x = n\pi + \operatorname{arc\,tg}(-2).$$

Nota. — Solutions diverses par Mmes Vve F. Prime, à Bruxelles; H. Youssoufian, à Constantinople; Cesar Spino.

QUESTION 514

Solution par M. W. J. Greenstreet (*M. A*).

Démontrer les identités suivantes

1° $$9\cos^2\varphi\cos^2 3\varphi - \sin^2\varphi\sin^2 3\varphi$$
$$= (2\cos 4\varphi + \cos 2\varphi)(\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi)$$

2° $$\frac{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\varphi - \cos 3\varphi - \sqrt{3}\sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin\varphi\sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$$
$$+ \frac{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\varphi - \cos 3\varphi + \sqrt{3}\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sin\varphi\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)}$$
$$- 2\frac{\sin\varphi\sin 2\varphi(\cos\varphi - \cos 3\varphi)}{\sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)} = 3. \text{ (*)}$$

(*Lauvernay.*)

1° On a $q\cos^2 3\varphi\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\sin^2 3\varphi$
$= (3\cos 3\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin 3\varphi)(3\cos 3\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\sin 3\varphi)$
$= (2\cos 3\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi)(2\cos 3\varphi\cos\varphi + \cos 4\varphi)$
$= (\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi)(\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi)$.

2° On a

$$(\cos\varphi - \cos 3\varphi)\left[\cos\overline{\varphi + \frac{\pi}{3}}\cos\overline{3\varphi + \frac{\pi}{3}} + \cos\overline{\varphi - \frac{\pi}{3}}\sin\overline{3\varphi - \frac{\pi}{3}}\right]$$
$$= 2(\cos\varphi - \cos 2\varphi)\sin^2\varphi\sin 2\varphi.$$

(*) *Énoncé rectifié* : le dernier terme de la seconde fraction est

$$\sqrt{3}\left(\sin 3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$$

et non

$$\sqrt{3}\left(\sin 3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$$

comme il était dit, par suite d'une faute typographique.

Puis

$$\sqrt{3}\left[\cos\varphi - \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi + \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi - \frac{\pi}{3} - \cos\varphi + \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi + \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi - \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 3\sin\varphi\left(\sin 3\varphi + \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$$

D'après cela, le membre de gauche devient

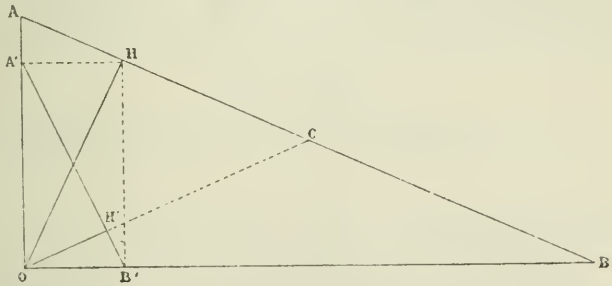
$$\frac{2\sin\varphi\sin 2\varphi(\cos\varphi\cos 3\varphi) + 3\left(\sin 3\varphi + \frac{\pi}{3}\sin 3\varphi - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\varphi\sin 2\varphi(\cos\varphi - \cos 3\varphi)}{\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$$

Toutes réductions faites, on trouve 3.

QUESTION 520

Solution par M. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

Étant donné un triangle AOB, *rectangle en* O, *on abaisse de* O *la perpendiculaire* OH *sur* AB, *puis* HA′ *et* HB′ *sur* OA *et* OB. *On obtient ainsi un second triangle* A′OB′. *On abaisse de même la hauteur* OH′ *sur* A′B′, *puis* H′A″ *et* H′B′ *sur* OA *et* OB. *On obtient*



ainsi un troisième triangle A″OB″ *avec une nouvelle hauteur* OH″. *On opère ainsi de suite indéfiniment. Montrer que*

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\sum(\mathrm{OH}) = \frac{\mathrm{OA.OB.AB}}{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \mathrm{OA.OB}}.$$

(E.-N. Barisien.)

OH′ est l'isogonale de OH par rapport à l'angle AOB. Par

suite, A'OB' est semblable à AOB. D'ailleurs OH passe par le milieu de A'B'; OH'' se confond avec la droite OH; OH''' avec OH'. Soit maintenant $OA = a$ $\widehat{OAB} = \alpha$,

$$OH = a \sin \alpha.$$

$$OH' = OB' \sin \alpha = OH \cos \alpha \sin \alpha = a \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

. . . . . .

$$\Sigma[OH] = a \sin \alpha[1 + \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \ldots].$$

Mais $\sin \alpha = \dfrac{OB}{AB}$ $\cos \alpha = \dfrac{OA}{AB}$.

Donc

$$\sum[OH] = \frac{OA.OB}{AB}\left[1 + \frac{OA.OB}{\overline{AB}^2} + \left(\frac{OA.OB}{\overline{AB}^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{OA.OB}{\overline{AB}^2}\right)^n\right].$$

Le dernier terme entre parenthèses est infiniment petit quand n est infiniment grand, par suite

$$\sum_{n=\infty}[OH] = \frac{OA.OB}{AB} \cdot \frac{-1}{\dfrac{OA.OB}{\overline{AB}^2} - 1} = \frac{OA.OB.AB}{\overline{AB}^2 - OA.OB}.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. W.-J. Greenstreet, M. A.; Droz-Farny, professeur au lycée Porentruy; Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille et de Times.

QUESTION 522

Solution par M. E.-N. Barisien.

Trois cercles de centres A, B, C, *et de rayons* α, β, γ, *sont tangents deux à deux* extérieurnment *ou* intérieurement. *Si* S, a, b, c, *désignent l'aire et les côtés du triangle* ABC, σ, *l'aire du triangle formé par les trois points de contact, démontrer que l'on a*

$$\frac{\sigma}{S} = 2\,\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

(M. d'Ocagne.)

Supposons le cas où les cercles sont tangents *extérieurement* deux à deux.

Désignons par A′, B′, C′ les points de contact, situés respectivement sur BC, CA et AB.

Posons

$$B'C' = \alpha', \qquad C'A' = \beta', \qquad A'B' = \gamma'.$$

On a

$$a = \beta + \gamma, \qquad b = \alpha + \gamma, \qquad c = \alpha + \beta,$$

$$\alpha' = 2\alpha \sin\frac{A}{2}, \qquad \beta' = 2\beta \sin\frac{B}{2}, \qquad \gamma' = 2\gamma \sin\frac{C}{2}.$$

En fonction des trois côtés a, b, c, on trouve pour l'aire de ABC

$$(1) \qquad S = \sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}$$

et pour un angle tel que A

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{bc}} \qquad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)}{bc}}.$$

D'autre part, dans le triangle A′B′C′, l'angle $C' = 90^\circ - \frac{C}{2}$.

On a donc

$$\sigma = \frac{1}{2}\alpha'\beta' \cos\frac{C}{2} = 2\,\alpha\beta \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

ou bien

$$(2) \quad \sigma = 2\alpha\beta.\sqrt{\frac{\beta\gamma}{bc}}.\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{ac}}\sqrt{\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{ab}} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{abc}\sqrt{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

En comparant (1) et (2), on trouve bien la relation demandée

$$(3) \qquad \frac{\sigma}{S} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

Développements. — 1° *Autre expression du rapport des aires* $\frac{\sigma}{S}$.

On a

$$\frac{S}{AB'C'} = \frac{bc}{\alpha^2}.$$

Donc

$$AB'C' = S.\frac{\alpha^2}{bc},$$

$$BC'A' = S\,.\,\frac{\beta^2}{ac},$$

$$CA'B' = S\,.\,\frac{\gamma^2}{ab}.$$

Écrivons aussi $\qquad A'B'C' = \sigma.$

Ajoutons ces quatre dernières égalités, il vient

$$S = \sigma + S\left(\frac{\alpha^2}{bc} + \frac{\beta^2}{ac} + \frac{\gamma^2}{ab}\right)$$

ou

$$(4) \qquad \frac{\sigma}{S} = 1 - \left(\frac{\alpha^2}{bc} + \frac{\beta^2}{ac} + \frac{\gamma^2}{ab}\right).$$

On a ainsi une autre expression du rapport $\frac{\sigma}{S}$.

2° *Expression du rapport des rayons des cercles circonscrits aux triangles* ABC *et* A'B'C'.

Soient R et ρ ces deux rayons respectifs. Nous avons

$$R = \frac{abc}{4S},$$

$$\rho = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4\sigma}.$$

D'où

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{abc} \times \frac{S}{\sigma} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{2\alpha\beta\gamma}.$$

Mais

$$\alpha'\beta'\gamma' = 8\alpha\beta\gamma.\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 8\alpha\beta\gamma.\ \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

Donc

$$\frac{\rho}{R} = 4\,\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

En comparant à (3), on a

$$(5) \qquad \frac{\rho}{R} = 2.\ \frac{\sigma}{S}.$$

Autrement (*). — Soient D, E, F les points de contact, que nous supposerons externes (démonstration semblable dans le cas contraire).

On a

$$\frac{CDE}{S} = \frac{\gamma^2}{ab},$$

$$\frac{AEF}{S} = \frac{\alpha^2}{bc}.$$

$$\frac{BFD}{S} = \frac{\beta^2}{ac}.$$

D'où

$$\frac{S - \sigma}{S} = \frac{\gamma^2}{ab} + \frac{\alpha^2}{bc} + \frac{\beta^2}{ac}.$$

(*) Cette solution est de M. Foucart, élève au lycée Michelet.

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{abc - a\alpha^2 - b\beta^2 - c\gamma^2}{abc},$$

$$a = \beta + \gamma, \qquad b = \gamma + \alpha, \qquad c = \alpha + \beta,$$

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) - (\beta + \gamma)\alpha^2 - (\gamma + \alpha)\beta^2 - (\alpha + \beta)\gamma^2}{abc},$$

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{abc}.$$

Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny; W.-J. Greenstreet, M.A.; de Times.

M. Lemoine nous a adressé une solution reposant sur la formule

$$\Sigma a(p - a)^2 = 2S(2R - r),$$

qu'il démontre de la façon suivante :

On a :

(1) $$\Sigma a(p - a)^2 = p^2\Sigma a - 2p\Sigma a^2 + \Sigma a^3 = 2p^3 - 2p\Sigma a^2 + \Sigma a^3.$$

Calculons Σa^2 et Σa^3,

on a $$a = (p - b) + (p - c),$$

d'où

$$\Sigma a^2 = 2[(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)],$$

mais $$(p - b)(p - c) = rr_a$$

donc $$\Sigma a^2 = 2[3p^2 - 2p(a + b + c) + \Sigma a^2 + r(r_a + r_b + r_c)];$$

mais $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, que j'appelle δ,

donc $$\Sigma a^2 = 2(-p^2 + \Sigma a^2 + r\delta);$$

d'où

(2) $$\Sigma a^2 = 2(p^2 - r\delta).$$

On a maintenant $$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r\delta),$$

ou, en multipliant par $a + b + c$ les deux membres,

$$\Sigma a^3 + \Sigma bc(b + c + a - a) = 4p(p^2 - r\delta),$$

d'où $$\Sigma a^3 + 2p\Sigma bc - 3abc = 4p(p^2 - r\delta).$$

Mais

$$2\Sigma bc = (a + b + c)^2 - \Sigma a^2 = 4p^2 - 2(p^2 - r\delta) = 2(p^2 + r\delta),$$

donc $$\Sigma a^3 + 2p(p^2 + r\delta) - 12prR = 4p(p^2 - r\delta),$$

d'où

(3) $$\Sigma a^3 = 2p(p^2 + 6Rr - 3r\delta).$$

Substituant dans (1) les valeurs de Σa^2 et Σa^3 données par (2) et (3), on a

$$\Sigma a(p - a)^2 = 2p^3 - 4p(p^2 - r\delta) + 2p(p^2 + 6Rr - 3r\delta)$$
$$= 12prR - 2pr\delta = 2S(6R - 4R - r) = 2S(2R - r).$$

QUESTION 523

Solution par M. A. Droz-Farny.

Étant donné un triangle ABC; *sur* AB, *on prend deux points isotomiques* D, D′ *et sur* AC *deux points isotomiques* E, E′. *Démontrer que l'axe radical des circonférences* BEE′ CDD′ *coïn-*

cide avec la droite qui joint le pied de l'antimédiane issue de A *au point symétrique de* A *relativement au milieu de* BC. — *Plus généralement, si* DE, D'E *sont des parallèles quelconques à* BC, *l'axe radical des circonférences* BEE', CDD' *passe toujours par le pied de la symédiane, et il détermine sur la médiane* AM *un point* P *défini par* $\frac{2PM}{PA} = \frac{BD.BD'}{AD.AD'}$, *(les longueurs étant prises en grandeur et en signe.)* (Bernès.)

Soit L le point de rencontre de l'axe radical avec BC ; dans la question 449 où les points D et E sont quelconques, M. Sollertinsky démontre que

$$\frac{LB}{LC} = -\frac{BD.BD'}{CE.CE'}, \quad \text{et} \quad \frac{PA}{PM} = \frac{2(AE.AE' - AD.AD')}{CE.CE' - BD.BD'}.$$

1er Cas. — Points isotomiques. Posons

$$BD = x \quad \text{et} \quad CE = y.$$

On a alors

$$AE.AE' = CE.CE' \quad \text{et} \quad AD.AD' = BD.BD';$$

donc $$\frac{LB}{LC} = -\frac{(c-x)x}{(b-y)y}, \quad \text{et} \quad \frac{PA}{PM} = 2.$$

Le point M est bien symétrique de A par rapport à M ; par contre, le point L varie suivant les valeurs de x et de y.

2e Cas. — Posons

$$CE = \alpha b, \qquad CE' = \beta b, \qquad BD = \alpha c, \qquad BD' = \beta c,$$

$$\frac{LB}{LC} = -\frac{c^2}{b^2};$$

L désignant le pied de la symédiane.

Comme

$$AD : BD = AE : CE \quad \text{et} \quad AD' : BD' = AE' : CE',$$

on a $$\frac{AD\ AD'}{BD.BD'} = \frac{AE.AE'}{CE.CE'} = \frac{AE.AE' - AD.AD'}{CE.CE' - BD.BD'}$$

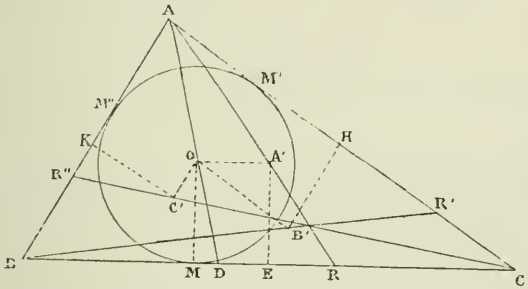
et par conséquent $$\frac{2PM}{PA} = \frac{BD.BD'}{AD.AD'}.$$

QUESTION 527

Solution par M. J. Dhavernas, élève au lycée Michelet.

Soit O *le centre du cercle inscrit au triangle* ABC; *on projette ce point sur les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle en leurs points milieux. On obtient ainsi trois points* A′B′C′; *démontrer que les droites* AA′ BB′ CC′ *concourent en un point* D. *Ce point* D *est le réciproque du point de Gergonne.* (G. L.)

Soient M, M′, M″ les points de contact du cercle O avec les trois côtés du triangle; R, R′, R″ les points où ces côtés sont



coupés par AA′, BB′, CC′; soit D le point de la bissectrice intérieure de l'angle A sur BC et E le milieu de ce côté.

On sait que la parallèle menée par O à BC partage les deux autres côtés dans le rapport $\frac{b+c}{a}$. En observant que OA′ = ME $= \frac{b-c}{2}$, on a

$$\frac{OA'}{DR} = \frac{b+c}{2p},$$

$$DR = \frac{p(b-c)}{b+c}.$$

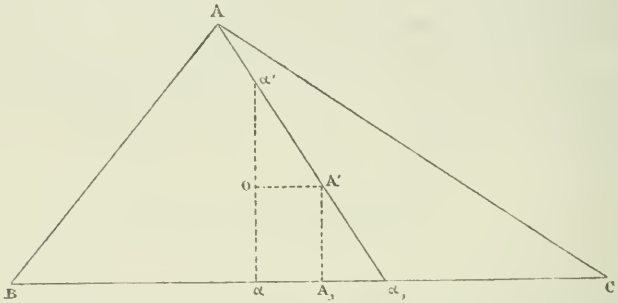
Par suite $BR = \frac{ac}{b+c} + \frac{p(b-c)}{b+c} = p - c,$

$$RC = a - (p - c) = p - b.$$

Le point R est donc le point de contact de BC avec le cercle exinscrit au triangle compris dans l'angle $\widehat{A}$. On démontrerait

de même que les deux autres cercles exinscrits touchent AC et AB en R′ et R″. Les points R, R′, R″ sont donc isotomiques des points M, M′, M″; AR, BR′, CR″ concourent en un point qui est bien le réciproque du point de Gergonne; c'est aussi l'anticomplémentaire du point O.

Autrement (*). — Soient A_1 le milieu de BC; α et α_1 les points de contact de ce côté avec le cercle inscrit et le cercle exinscrit dans l'angle A. On sait que αO coupe $A\alpha_1$ en un point α'



symétrique de α par rapport à O. Mais A′ est milieu de $\alpha\alpha_1$, donc A′ est sur $A\alpha_1$. AA′ se confond donc avec $A\alpha_1$. Or, les droites telles que $A\alpha_1$ concourent en un point D; comme les droites $A\alpha$ concourent en Γ point de Gergonne, et que $B\alpha = C\alpha_1$ ..., D est le réciproque du point de Gergonne. Ce point D n'est d'ailleurs autre que le point de Nagel ν de ABC.

Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny et Grolleau.

QUESTIONS PROPOSÉES

554. — On donne un triangle ASB et une droite SH qui rencontre AB en H. Par B on trace une sécante arbitraire qui rencontre SH en C, SA en D, et une parallèle A′B′ à AB en P. Sur une parallèle menée de P à SH on prend un point Q tel que PQ soit divisé par la parallèle de S à AB dans le rapport $\frac{HA}{HB}$. Démontrer :

1° Que la droite QD divise CA suivant un rapport indépendant de H et de la sécante BC;

2° Que lorsque la sécante BC varie, A'B' et H restant fixes, le lieu de Q est une parallèle à BC;

3° Que lorsque, BC et A'B' restant fixes, H varie, le lieu de Q est une parallèle à SA;

4° Que lorsque, BC et H restant fixes, A'B' varie, le lieu de Q est une droite parallèle à AC.

(Cette question comprend la question 530). *(Bernès.)*

555. — G, G' étant deux points fixes d'une circonférence OK, un point fixe de la corde GG'; par un point quelconque m de la circonférence, on trace une corde mm' parallèle à GG' et une corde mM qui passe par K.

1° Le rapport $\frac{m'G \,.\, MG'}{MG \,.\, m'G'}$ est constant;

2° Déterminer m par la condition que le rayon m'O soit perpendiculaire sur MG. *(Bernès.)*

556. — Dans un triangle ABC, on donne le cercle des neuf points, (centre et rayon), le point de contact G de ce cercle et du cercle inscrit, ainsi que la direction du côté BC:

1° Lieu du point de contact D de BC et du cercle inscrit;

2° Construire le triangle en supposant que l'on donne aussi $b - c$; ou bien le rapport $\frac{DH}{DM}$ où H est le pied la hauteur issue de A, et M le milieu de BC. *(Bernès.)*

557. — Construire un triangle ABC, connaissant le milieu M de BC et les points de contact G, G' du cercle des neuf points soit avec le cercle inscrit I et le cercle exinscrit I_a, soit avec les cercles exinscrits I_b, I_c. Distinguer les deux cas, d'après la position de M sur le cercle MGG, supposé fixe. *(Bernès.)*

558. — Étant donné un triangle ABC,

1° La parallèle à BC menée par A, la perpendiculaire abaissée sur la symédiane Ad du centre O du cercle ABC,

et la perpendiculaire à AO menée par le point de rencontre T des tangentes en B et C à la circonférence ABC, sont trois droites concourantes;

2° Si cette dernière perpendiculaire rencontre en δ, δ' les bissectrices de l'angle A, le cercle décrit sur $\delta\delta'$ comme diamètre et le cercle ABC ont pour axe radical la symédiane A*d*. *(Bernès.)*

559. — 1° On donne un point A et deux droites L, L′ qui se coupent en B. Les perpendiculaires abaissées de A sur L, L′ rencontrent respectivement L′ et L en D et D′. Démontrer que les trois points B, D, D′ et les symétriques α, α' de A relativement à L, L′ sont sur une même circonférence;

2° Si, L, L′ restant fixes, le point A parcourt une certaine courbe, le centre du cercle BDD′$\alpha\alpha'$ décrit une courbe symétriquement semblable. *(Bernès.)*

560. — Étant données quatre droites qui concourent en S, si l'on coupe le faisceau en A, B, C, D par une circonférence arbitraire qui passe par S, dans le quadrilatère ABCD le rapport $\frac{AC.BD}{AD.BC}$ est constant. *(Bernès.)*

561. — Démontrer que deux triangles sont semblables lorsque les cosinus de leurs angles sont proportionnels.

(La démonstration qui a été donnée en 1880, page 258, repose sur une erreur de calcul.) *(Dellac.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11088-5-04.

NOTE SUR LE DODÉCAÈDRE ET L'ICOSAÈDRE RÉGULIERS CONVEXES

Par M. **Joseph Cernesson**, professeur au lycée de Sens.

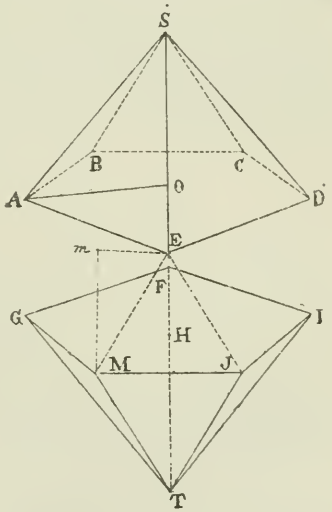
(*Suite* et *fin*, *voir p. 121.*)

II. Icosaèdre.

Considérons, en second lieu, un icosaèdre régulier convexe.

Pour le construire, on construit deux pyramides régulières pentagonales SABCDE, TGFIJM, ayant pour côté de leurs bases le côté de l'icosaèdre, et pour arête latérale ce même côté.

On fait d'abord coïncider les plans des pentagones ABCDE, GFIJM, de manière que les sommets de l'un soient les milieux des arcs sous-tendus par les côtés de l'autre dans le cercle circonscrit. Puis, on fait mouvoir la pyramide TGFIJM parallèlement à elle-même, de sorte que sa hauteur TH soit toujours dans le prolongement de la hauteur SO de la pyramide S; et cela jusqu'à ce que les dix triangles isoscèles, tels que EMJ, soient devenus équilatéraux.



1° La hauteur SO de l'une des deux pyramides est le côté du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle circonscrit à ABCDE; car elle est le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse AS = AE, côté du pentagone régulier inscrit dans le même cercle, et pour premier côté de l'angle droit le rayon AO de ce cercle; cela, d'après la première propriété rappelée précédemment.

2° La distance Mm des plans des deux pentagones est, d'après la même propriété, égale au rayon AO ; car l'hypoténuse ME est égale au côté du pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle O : et mE est le côté du décagone régulier convexe inscrit dans le même cercle.

Épure. — Construction des projections de l'icosaèdre régulier, reposant sur le plan horizontal par le sommet T, *la diagonale* TS *étant verticale.*

Les remarques que nous avons faites pour le dodécaèdre nous dispensent d'entrer dans de nouveaux détails. On voit encore que tous les rabattements habituels peuvent être supprimés ; car, dès qu'on a seulement construit la projection horizontale, ces rabattements ont pour but de construire des longueurs qui existent déjà sur l'épure: le rayon du cercle qu'on a dû tracer, et le côté du décagone régulier convexe inscrit.

Application. — Calcul du côté a de l'icosaèdre régulier convexe, en fonction du rayon ρ de la sphère circonscrite.

Soit R le rayon du cercle O, on a

$$2SO + HO = 2\rho,$$

or,
$$SO = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} \qquad HO = R.$$

Donc
$$R(\sqrt{5} - 1) + R = 2\rho,$$
$$R\sqrt{5} = 2\rho;$$

d'autre part,
$$a = \frac{R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2},$$

multipliant ces deux dernières relations, membre à membre,

$$a\sqrt{5} = \rho\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

(5) d'où
$$a = \rho\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Les formules (4) et (5) sont bien connues. M. Rouché, dans

sa *Géométrie*. M. Dostor, dans le tome Ier de ce recueil (pages 138-167), les ont établies par des considérations générales.

Mais c'est la première fois, croyons-nous, qu'elles sont établies par des considérations purement empruntées à l'enseignement de la classe de mathématiques élémentaires, sans le secours de la trigonométrie.

RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UN LIEU GÉOMÉTRIQUE

DANS LE PLAN

Par **S. Zaremba**, docteur ès sciences.

1. — En rédigeant cette leçon qui, depuis longtemps, fait partie du programme d'agrégation des Sciences mathématiques, nous avons essayé d'indiquer rapidement, mais d'une manière complète, les questions fondamentales que l'on peut rencontrer dans la détermination rigoureuse d'un lieu géométrique, par les méthodes de la géométrie analytique. Nous devons tous nos remerciements à M. de Saint-Germain, qui a bien voulu nous aider de ses excellents conseils et qui a même eu l'obligeance de nous communiquer le premier des deux exemples que nous donnons au § 5.

2. — Pour établir un point de départ bien précis, il ne sera pas inutile de rappeler la définition du lieu géométrique :

On entend par lieu géométrique l'ensemble des points jouissant d'une propriété commune par rapport à un système de points fixes.

Que doit-on entendre par « propriété d'un point par rapport à un système de points fixes? » Envisageons un système quelconque (S) de points fixes et supposons qu'il soit possible de construire, suivant une règle donnée à priori, une figure (F) à l'aide du système (S) et d'un point P pris arbitrairement dans le plan du système (S). La figure (F) offrira différents éléments mesurables, tels que des segments, des angles, des surfaces, etc. Désignons par :

$$(1) \qquad u_1, u_2 \ldots u_n,$$

quelques-uns de ces éléments et imaginons qu'au lieu de prendre le point P arbitrairement, on le choisisse de façon que les éléments (1) vérifient une relation donnée :

$$(2) \qquad \psi(u_1, u_2 \ldots u_n) = o,$$

nous dirons alors que le point P jouit d'une propriété par rapport au système (S) et que cette propriété est exprimée par l'intermédiaire de la figure (F) au moyen de l'équation (2).

Une propriété d'un point par rapport à un système de points fixes peut être exprimée sous une forme très différente de celle sous laquelle nous venons de la présenter; mais, dans tous les cas, l'expression d'une propriété d'un point est réductible à la forme que nous avons adoptée. En effet, on sait qu'il est toujours possible de représenter un lieu géométrique par une équation. Or, représenter un lieu par une équation, c'est exprimer la propriété commune des points du lieu sous une forme qui n'est qu'un cas particulier de celle dont nous voulions établir la généralité.

Exemple : Considérons plusieurs cercles $C_1, \ldots C_n$ et envisageons le lieu d'un point mobile P, assujetti à la condition que les tangentes menées, de ce point, aux cercles considérés, vérifient une relation donnée. Cette relation sera précisément, dans cet exemple, exprimée par l'équation (2); l'ensemble des cercles $C_1, C_2 \ldots C_n$ représente ici le système fixe (S) et l'ensemble des tangentes menées d'un point du plan aux cercles C, constitue ici la figure variable (F).

L'exemple précédent conduit a la remarque importante que la figure variable (F) peut cesser d'exister, si le point P, qui doit décrire le lieu, est situé dans certaines régions du plan. En effet, soit un point à l'intérieur de l'un des cercles C ; il sera impossible de mener, par ce point, une tangente à ce cercle. Par conséquent, dans notre exemple, la figure (F) n'existe pas, dès que le point P est intérieur à l'un des cercles formant le système (S).

3. — Voici la méthode qui s'offre immédiatement pour déterminer l'équation d'un lieu géométrique défini par l'équation (2). On choisira un système de coordonnées (x, y) dont

on définira la position par rapport au système de points fixes (S) et l'on établira toutes les relations qui existent entre les éléments (1) et les coordonnées x, y du point P. Soient :

(3) $$\psi_k(x, y, u_1, u_2, \ldots u_n) = 0 \quad k = (1, 2, \ldots p).$$

ces relations. Bien entendu, on choisira le système de coordonnées et sa position par rapport au système (S) de façon que la déduction des équations (3) soit aussi simple que possible. Ces équations devant être compatibles avec l'équation (2), les coordonnées x et y de chaque point du lieu vérifieront les conditions qui expriment que le système, formé par l'adjonction de l'équation (2) aux équations (3), admet une solution commune par rapport à $u_1 \ldots u_n$. L'élimination de $u_1 \ldots u_n$ entre l'équation (2) et le système (3) doit être possible et elle doit conduire à une résultante unique :

(4) $$F(x, y) = 0.$$

On reconnaît, en effet, que, dans l'hypothèse contraire, l'un des trois cas suivants aura lieu nécessairement :

1° L'équation (2) est compatible avec les équations (3), quels que soient x et y; les points jouissant de la propriété demandée remplissent des régions entières du plan.

2° Les équations (3) et l'équation (2) conduisent à deux résultantes distinctes; les points en question, s'il en existe, forment une suite discontinue.

3° Les équations (3) et l'équation (2) sont contradictoires; il n'en existe point.

Il est évident que tous les points du lieu géométrique, s'il existe, se trouvent sur la ligne représentée par l'équation (4). Cette ligne doit, par conséquent, être réelle, sans quoi le lieu n'existera pas. La réalité de la ligne (4) étant admise, nous avons à distinguer les points de cette ligne qui font réellement partie du lieu, des points qui n'y appartiennent pas.

4. — Avant d'entreprendre cette étude, signalons la circonstance suivante, dont il faut tenir compte dans bien des applications : il peut arriver que les équations (3) ne conservent pas une forme analytique invariable pour toutes les valeurs de x et de y.

Exemple. — *Soit à déterminer le lieu d'un point* P *pour lequel la somme* a *des distances* u_1 *et* u_2 *à deux droites concourantes* (D_1) *et* (D_2) *est constante.*

L'équation (2) devient ici :

$$u_1 + u_2 - a = 0. \tag{5}$$

Rapportons les droites (D_1) et (D_2) à un système de coordonnées rectangulaires et soient :

$$\left\{\begin{array}{l} x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - d_1 = 0, \\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - d_2 = 0, \end{array}\right. \tag{6}$$

les équations de ces droites. Celles-ci partagent le plan en quatre régions dont chacune est caractérisée par les signes des premiers membres p_1 et p_2 des équations (6), quand on y substitue les coordonnées de l'un de ses points.

Cela posé, on s'assure aisément que les équations (3) prendront ici chacune des quatre formes :

I	$u_1 - p_1 = 0,$	$u_2 - p_2 = 0,$
II	$u_2 - p_2 = 0,$	$u_2 + p_2 = 0,$
III	$u_1 + p_1 = 0,$	$u_2 + p_2 = 0,$
IV	$u_1 + p_1 = 0,$	$u_2 - p_2 = 0,$

selon la région où se trouve le point P.

Un point du lieu vérifiera par conséquent la 1re, 2e, 3e ou 4e des équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{r} p_1 + p_2 = a, \\ p_1 - p_2 = a, \\ -p_1 - p_2 = a, \\ -p_1 + p_2 = a. \end{array}\right. \tag{7}$$

selon qu'il sera situé dans la région du plan qui correspond au système I, II, III ou IV. On en conclut que le lieu demandé coïncide avec la totalité ou une partie du contour du rectangle formé par l'intersection des droites (7). D'ailleurs, la première hypothèse est seule vraie. Car, soit un point sur un côté du rectangle en question, sur celui par exemple qui appartient à la 4e des droites (7); p_1 sera négatif et p_2 positif. L'équation

$$-p_1 + p_2 = a,$$

exprime donc que la somme des distances de ce point aux droites données est bien égale à la longueur donnée a.

La méthode suivie dans cet exemple est générale : on peut l'énoncer ainsi : Dans le cas où le plan se divise en plusieurs

régions telles que, dans deux régions différentes, les équations (3) ont des formes analytiques différentes, on associera successivement à l'équation (2) toutes les formes que peuvent prendre les équations (3) et l'on calculera chaque fois la résultante correspondante; soient

$$(8) \qquad F_i = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots v)$$

les résultantes ainsi obtenues et $R_1, R_2 \ldots R_v$, les régions auxquelles elles se rapportent respectivement. Le lieu cherché, s'il existe, coïncidera avec la totalité ou une partie du contour formé par l'ensemble des portions des courbes (8) respectivement situées dans les régions $R_1, R_2 \ldots R_v$. Observons, en terminant ce paragraphe, que le seul cas où les équations (3) peuvent ne pas conserver une forme invariable est celui-ci : les éléments $u_1 \ldots u_n$ se présentent dans la définition du lieu géométrique comme des *quantités arithmétiques*. C'est là une conséquence immédiate du but dans lequel on introduit des quantités algébriques en géométrie.

5. — Revenons maintenant à la question posée à la fin du § 3. Nous y répondrons en supposant, pour simplifier le langage, que les équations (3) ont une forme analytique invariable pour toutes les valeurs possibles de x et y. Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, il suffirait d'appliquer ce que nous allons dire, non pas à toute l'étendue du plan, mais successivement à chacune des régions où les équations (3) conservent une forme invariable.

Observons d'abord que des arcs réels de la courbe (4) peuvent être tels que, pour aucun point d'un de ces arcs, il ne soit possible de construire la figure variable (F) qui intervient dans la définition du lieu. De tels arcs de (4) doivent évidemment être exclus du lieu.

Exemple. — *Deux ellipses égales touchent une droite fixe* Oy *en un point fixe* O, *qui est l'extrémité du grand axe pour l'une, et l'extrémité du petit axe pour l'autre. Lieu de leurs points d'intersection lorsque les axes varient de manière que l'aire reste constante.*

Rapportons le plan à la droite Oy et à la perpendiculaire

Ox à celle-ci; désignons par u_1 et u_2 les inverses des abscisses des centres et par $\frac{\pi}{c^2}$ la valeur commune des aires des deux ellipses. Les quantités u_1 et u_2 sont de même signe, sans quoi les deux ellipses n'auraient, parmi les points réels communs, que le point O. L'équation (2) prendra la forme

$$(9) \qquad u_1 u_2 = c^2,$$

et les équations (3) deviennent

$$(10) \qquad \begin{cases} u_1^2 x^2 + u_2^2 y^2 - 2u_1 x = 0, \\ u_2^2 x^2 + u_1^2 y^2 - 2u_2 x = 0. \end{cases}$$

Elles conservent évidemment leur forme dans tout le plan. Éliminons d'abord le cas $u_1 = u_2$. Les équations (10) sont alors identiques et l'on reconnaît sans aucune difficulté qu'à l'hypothèse $u_1 = u_2$ correspond une portion du lieu cherché, portion qui est représentée par l'ensemble des deux cercles.

$$(11) \quad c^2(x^2 + y^2) - 2x = 0 \quad \text{et} \quad c^2(x^2 + y^2) + 2x = 0.$$

Il s'agit maintenant de former la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (9) et (10) admettent une solution commune (u_1', u_2') telle que l'inégalité

$$(12) \qquad u_1' \neq u_2',$$

ait lieu. La condition (12) étant vérifiée, les équations (10) sont équivalentes au système :

$$(13) \qquad \begin{cases} (u_1^2 + u_2^2)(x^2 + y^2) - 2(u_1 + u_2)x = 0, \\ (u_1 + u_2)(x^2 - y^2) - 2x = 0; \end{cases}$$

qui sont équivalentes, à leur tour, aux équations :

$$(14) \qquad \begin{cases} u_1 u_2 = \dfrac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2}, \\ u_1 + u_2 = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}; \end{cases}$$

pourvu cependant que l'on n'ait pas $x = \pm y$, mais cette hypothèse doit être écartée parce que les équations (13) montrent que l'on aurait alors $x = y = 0$.

La résultante cherchée est par conséquent

$$(15) \qquad C^2 = \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2}.$$

Ainsi tous les points du lieu qui ne sont pas situés sur l'un des cercles (11) se trouvent sur la courbe (15). Reste à distinguer la partie utile de cette courbe. Observons à cet effet que la figure variable (F) qui sert à définir le lieu considéré se compose ici des deux ellipses (10).

Or, pour qu'il soit possible de construire ces ellipses pour un point donné (x, y) qui n'est pas situé sur l'un des cercles (11), il faut et il suffit que les équations (14) fournissent des valeurs réelles de u_1 et u_2, condition qui, on le reconnaît très aisément, s'exprime par l'inégalité

$$x^2 - 3y^2 \geqslant 0. \tag{16}$$

Donc, la partie utile (σ) de la courbe (15) ne peut dépasser la portion (Σ) de cette courbe qui est comprise dans la région (16) du plan. D'ailleurs (σ) coïncide avec (Σ). En effet, soit un point (x, y) situé sur (Σ), d'après la définition même de (Σ), on pourra construire, pour ce point, les ellipses (10), et comme à cause de (15) et (14) l'équation (9) sera vérifiée, la valeur commune des aires des deux ellipses sera bien égale à $\frac{\pi}{c^2}$.

Le lieu demandé se compose donc de l'ensemble des deux cercles (11) et de la partie (Σ) de la courbe (15).

Cela posé, observons que les arcs réels de (15) ne sont pas tous situés dans la région (16). Donc, la circonstance dont il s'agissait d'établir la possibilité est réalisée dans cet exemple.

En revenant aux considérations générales, il nous reste à examiner si tous les points de (4), pour lesquels la figure variable (F) existe, font réellement partie du lieu. L'exemple suivant va nous éclairer là-dessus.

Exemple. — *Soit à déterminer le lieu d'un point mobile* P *tel que la somme* m *des longueurs* u_1 *et* u_2 *des tangentes menées de ce point à deux cercles donnés* C_1 *et* C_2 *soit fixe.*

Rapportons le plan à la ligne des centres OX et à l'axe radical OY des cercles donnés et soient :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2a_1x + c = 0, \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + c = 0, \end{array}\right. \tag{17}$$

les équations de ces cercles. Désignons, pour abréger l'écri-

ture, par s_1 et s_2 respectivement les premiers membres de ces équations.

L'équation (2) devient ici :

$$u_1 + u_2 - m = 0, \tag{18}$$

et le système (3) se réduit à

$$u_1^2 - s_1 = 0; \qquad u_2^2 - s_2 = 0. \tag{19}$$

Ces équations conservant leur forme dans tout le plan, tous les points du lieu, s'il existe, se trouveront sur la courbe représentée par la résultante :

$$(s_1 - s_2)^2 - 2m^2(s_1 + s_2) + m^4 = 0 \tag{20}$$

des équations (18) et (19).

L'équation (20) représente une conique. Je dis que cette conique est bitangente à chacun des cercles (17). En effet, l'équation (20) peut s'écrire sous chacune des deux formes :

$$\left\{\begin{array}{l} (s_1 - s_2 + m^2)^2 - 4m^2 s_1 = 0, \\ (s_1 - s_2 - m^2)^2 - 4m^2 s_2 = 0. \end{array}\right. \tag{21}$$

Il suffira, pour l'objet que nous avons en vue, de nous placer dans les hypothèses suivantes : les cercles (17) ne se coupent pas réellement et sont extérieurs l'un à l'autre; de plus, le contact de (20) avec chacun des cercles (17) est réel et a lieu dans des points distincts. On déduira facilement les conditions pour qu'il en soit ainsi et l'on s'assurera qu'elles sont réalisables. Il résulte immédiatement de nos hypothèses que la conique (20) est réelle et qu'aucun de ses points n'est intérieur à l'un des cercles (17). Par conséquent, la figure variable (F) qui se compose ici des tangentes menées d'un point du plan aux cercles (17) existe pour chaque point de notre conique. On verra cependant que le lieu cherché n'est représenté que par la portion de cette conique qui est située entre ses cordes de contact avec les cercles (17). En effet, soit un point x', y' sur la conique (20). L'équation (20) étant la résultante des équations (18) et (19), ces équations admettent une solution commune par rapport à u_1 et u_2. Soit u_1' et u_2' cette solution commune; elle sera toujours réelle et, comme on le verra incidemment dans la suite, unique. Deux cas peuvent se présenter : 1° u_1' et u_2' sont tous deux positifs; 2° u_1' et u_2' sont de signes contraires.

Dans le premier cas, x', y' appartiendrait évidemment au lieu. Dans le second cas, au contraire, il n'y appartiendrait pas, puisque c'est la différence et non la somme des tangentes menées de ce point aux cercles donnés qui serait égale à m.

Cela posé, soit d'abord le point x', y' situé entre les cordes de contact de (20) avec les deux cercles. D'après (21), les équations de ces cordes sont :

$$(22) \qquad \begin{cases} s_1 - s_2 + m^2 = 0, \\ s_1 - s_2 - m^2 = 0. \end{cases}$$

où l'on a $\qquad s_1 - s_2 = 2(a_1 - a_2)x.$

On aura donc, pour la position considérée du point x', y', à la fois

$$s_1 - s_2 < m^2 \quad \text{et} \quad s_2 - s_1 < m^2,$$

ou bien, à cause de (19),

$$(u_1' - u_2')(u_1' + u_2') < m^2 \text{ et } (u_2' - u_1')(u_2' + u_1') < m^2.$$

d'où, en tenant compte de (18) :

$$u_1' - u_2' < u_1' + u_2' \text{ et } u_2' - u_1' < u_1' + u_2 ;$$

inégalités qui prouvent que u_1' et u_2' sont positifs, lorsque le point x', y' est situé entre les deux droites (22).

Envisageons maintenant le cas où le point x', y' est situé en dehors de la région du plan que limitent les droites (22) ; l'une des inégalités suivantes aura nécessairement lieu

$$(23) \qquad s_1 - s_2 > m^2 \qquad \text{ou} \qquad s_2 - s_1 > m^2.$$

Soit, par exemple,

$$s_1 - s_2 > m^2;$$

on aura alors, en tenant compte des équations (18) et (19)

$$u_1' - u_2' > u_1' + u_2',$$

ce qui prouve que u_1' sera positif et u_2' négatif. On verrait, d'une manière analogue, que u_2 serait positif et u_1 négatif, si la seconde, non la première, des inégalités (23) avait lieu.

On voit, en résumé, que le lieu cherché est représenté par la portion de la conique (20) qui est comprise entre ses cordes de contact avec les cercles donnés.

C'est ce que nous voulions établir.

Préparés par l'exemple précédent, cherchons à énoncer sous une forme générale les conditions nécessaires et suffisantes

pour qu'un point x', y' de la courbe (4) appartienne réellement au lieu. Nous supposerons qu'il soit possible de construire, à l'aide du point x', y', la figure variable (F) qui intervient dans la définition du lieu, car, s'il n'en était pas ainsi, ce point, comme on l'a déjà fait observer, ne ferait certainement pas partie du lieu. Cela posé, attribuons à x et y, dans les équations (3), respectivement les valeurs x' et y'; construisons, pour le point x', y', les différentes dispositions que peut offrir la figure variable (F) et envisageons les différents systèmes de valeurs des éléments $u_1 \ldots u_n$ qui correspondent aux différentes dispositions de la figure (F) pour le point x', y'. Ces différents systèmes de valeurs des éléments $u_1 \ldots u_n$ vérifieront certainement les équations (3). Mais il faut se garder de croire que, réciproquement, tout système de solutions des équations (3) représentera le système de valeurs des éléments $u_1 \ldots u_n$ correspondant à une certaine disposition de la figure (F). Ainsi, par exemple, les équations (19) admettent toujours quatre systèmes de solutions par rapport à u_1 et u_2; et, cependant, bien que ces équations représentent toutes les relations qui existent entre u_1, u_2, x et y, le système de solutions positives correspond seul à une réalité géométrique.

Ceci étant bien compris, considérons les systèmes de solutions communes, par rapport à $u_1 \ldots u_n$, des équations (3) et de l'équation (2), x et y étant respectivement égaux à x' et à y'. Ces solutions existeront parce que x' et y' vérifient la résultante (4) des équations considérées. Deux cas peuvent se présenter : 1° aucun de ces systèmes de solutions communes de nos équations ne présente les valeurs acquises réellement par les éléments $u_1 \ldots u_n$, quand on construit la figure (F) pour le point x', y'. 2° l'un au moins des systèmes en question jouit de la propriété précédente.

Dans le premier cas, le point x', y' n'appartiendra évidemment pas au lieu, et dans le second cas, au contraire, il en fera certainement partie. Voici, par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point x', y' de la courbe (4) appartienne réellement au lieu :

1° La figure variable F doit exister pour ce point.

2° L'une au moins des solutions communes correspondantes des équations (3) et de l'équation (2) doit représenter les valeurs que prennent réellement les éléments $u_1 \ldots u_n$, quand on construit la figure (F) pour le point x', y'.

On exprimera, dans chaque cas, ces conditions analytiquement en écrivant que l'une des solutions communes des équations (3) et de l'équation (2) satisfait à certaines inégalités.

Dans bien des cas, il n'y a pas à se préoccuper de la seconde des conditions que nous avons posées. Il en sera toujours ainsi lorsque, pour toutes les valeurs de x et y, les équations (3) admettront précisément autant de solutions que la figure (F) peut offrir de dispositions différentes.

6. — La méthode que nous avons exposée pour la recherche de l'équation d'un lieu géométrique peut être généralisée de la manière suivante : au lieu d'établir les équations (3), on peut considérer, à côté des éléments $u_1 \ldots u_n$, d'autres éléments de la figure variable (F), éléments qui ne jouent aucun rôle dans la définition du lieu cherché; désignons-les par $v_1, v_2 \ldots v_m$ et soient

$$(24) \qquad f_i(x, y, u_1 \ldots u_n, v_1 \ldots v_m) = 0, \quad (i = 1, 2 \ldots p),$$

toutes les relations qui existent entre les coordonnées x et y du point qui doit décrire le lieu et les éléments

$$u_1 \ldots u_n, \quad v_1 \ldots v_m.$$

On s'assure, par des considérations analogues à celles qui ont été succinctement indiquées au n° 3, que l'élimination des éléments $u_1 \ldots u_n$, $v_1 \ldots v_m$ entre les équations (24) et l'équation (2) doit être possible et que, de plus, cette élimination doit conduire à une résultante unique :

$$(25) \qquad F(x, y) = 0.$$

On verra aussi, sans aucune peine, que tous les points du lieu cherché, s'il existe, doivent se trouver sur la ligne que représente l'équation (25). Enfin, il va sans dire que le cas étudié au n° 4 peut se présenter et doit être traité alors comme nous l'avons montré à l'endroit cité. Voyons maintenant comment on pourra s'assurer si un point x', y' de la ligne (25) appartient réellement au lieu cherché. Il est évident que la figure variable (F) doit pouvoir être construite à l'aide du point x', y'. On conçoit, en outre, que la solution de la question

s'achèvera en étudiant la nature de la solution commune correspondante des équations (24) et de l'équation (2). Mais il ne faudrait pas croire que, dans cette étude, il faille tenir compte des valeurs de $v_1 \ldots v_m$ qui correspondent aux valeurs x' et y' de x et y, au même titre que des valeurs $u_1 \ldots u_n$. On ne doit même pas supposer que les valeurs en question de $v_1 \ldots v_m$ sont nécessairement réelles. C'est ce que l'on verra dans l'exemple suivant.

Exemple. — *Par un point quelconque* P *du plan, traçons la conique* (C) *qui passe par quatre points donnés* A, A′, A″, A‴; *joignons le point* P *à un point donné* O; *déterminons le point d'intersection* J *de la droite* OP *avec une droite donnée* (D) *et cherchons le lieu du point* P, *lorsque le point* J *coïncide avec le point central* M *de l'involution déterminée sur la droite* (D) *par les points conjugués par rapport à la conique* (C).

Désignons par u le segment $\overline{MJ}$, l'équation (2) se réduira dans notre exemple à

$$u = 0. \tag{26}$$

Cela posé, rapportons le plan à un système de coordonnées cartésiennes et prenons la droite (D) pour axe des x. Désignons par v_3 l'abscisse du point J et par v_1 et v_2, respectivement, les abscisses des points d'intersection de la conique variable (C) avec l'axe des x, c'est-à-dire la droite (D).

On aura alors, en se rappelant que le point central d'une involution coïncide avec le milieu du segment compris entre les points doubles :

$$u = v_3 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \tag{27}$$

Soient

$$f_1(x, y) = a_1x^2 + a_1'y^2 + a_1'' + 2b_1y + 2b_1'x + 2b_1''xy = 0,$$

et

$$f_2(x, y) = a_2x^2 + a_2'y^2 + a_2'' + 2b_2y + 2b_2'x + 2b_2''xy = 0,$$

les équations de deux coniques passant par les points donnés A, A′, A″ et A‴. Voici alors quelle sera l'équation de la conique (C) passant par le point P :

$$f_1(x, y)f_2(X, Y) - f_1(X, Y)f_2(x, y) = 0,$$

où x et y sont les coordonnées du point P, X et Y les coor-

données courantes. On déduit de l'équation précédente, en faisant $Y = 0$:

$$(28)\quad \begin{cases} \{a_2 f_1(x,y) - a_1 f_2(x,y)\}(v_1 + v_2) + 2\{b'_2 f_1(x,y) - b'_1 f_2(x,y)\} = 0, \\ \{a_2 f_1(x,y) - a_1 f_2(x,y)\} v_1 v_2 - a''_2 f_1(x,y) + a''_2 f_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

On trouve enfin, en désignant par α et β les coordonnées du point fixe O :

$$(29)\qquad v_3(y - \beta) - \alpha y + \beta x = 0.$$

Le système formé par les équations (27), (28) et (29) représente évidemment l'ensemble des relations qui existent entre les coordonnées x et y du point P et les éléments u, v_1, v_2 et v_3; c'est le système (24), réduit. Les équations (26), (27), (28) et (29) donnent lieu à la résultante unique :

$$(30)\quad \begin{cases} (\beta x - \alpha y)(a_2 f_1(x, y) - a_1 f_2(x, y)) \\ \qquad - (y - \beta)\{b'_2 f_1(x, y) - b'_1 f_2(x, y)\} = 0. \end{cases}$$

Donc tous les points du lieu cherché, s'il existe, se trouvent sur la courbe (30). D'ailleurs, il est aisé de montrer que tous les points réels de la courbe (30) appartiennent véritablement au lieu cherché et que, par conséquent, celui-ci coïncide complètement avec cette courbe. En effet, la figure variable (F) qui a servi à définir le lieu, existe pour chaque point du plan, sans exception; donc, si nous prenons un point réel x', y' sur la courbe (30), l'élément u existera et prendra une certaine valeur déterminée u', qui vérifiera nécessairement les équations (27), (28) et (29), en y faisant $x = x'$ et $y = y'$. Si l'on tient compte maintenant de ce que les équations (27), (28) et (29) font correspondre, à chaque système de valeurs de x et y, une valeur *unique* de u; et que, d'autre part, les équations en question doivent être compatibles avec l'équation (26), pour les valeurs x' et y' de x et y, on reconnaît que l'on devra avoir :

$$u' = 0;$$

ainsi, le point x', y' fait partie du lieu demandé. Cela posé, il est aisé de voir qu'en choisissant convenablement les données du problème, on pourra toujours faire en sorte que les valeurs de v_1 et v_2, correspondant à tous les points de certains arcs de (30), soient imaginaires.

Il suffira pour cela de prendre la droite (D) de façon qu'elle ne soit pas coupée, en des points réels, par toutes les coniques passant par les points fixes A, A′, A″ et A‴. On voit donc que le cas prévu par nos considérations générales peut réellement se présenter.

Terminons ce petit travail par la remarque suivante. Il peut arriver qu'en cherchant à déduire la résultante d'un système d'équations, on obtienne, au lieu de celle-ci, le produit de la véritable résultante par un facteur 0. Or, dans les considérations qui précèdent, nous avons supposé implicitement que les éliminations ont été effectuées sans qu'on ait introduit de facteurs étrangers dans les résultantes. Il faudra donc, dans les applications, avoir soin de vérifier qu'il en est bien ainsi.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 126).

327. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$6x^2 + 1 = k^2.$$

Les solutions sont :

$$\begin{array}{lllll} x_0 = 0 & x_1 = 2 & x_2 = 20 & x_3 = 198 & \ldots \\ k_0 = 1 & k_1 = 5 & k_3 = 49 & k_3 = 485 & \ldots \end{array}$$

$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2}$$

$$k_n = 10k_{n-1} - k_{n-2} = \frac{1}{2}(5x_n - x_{n-1}).$$

328. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$7x^2 + 1 = k^2.$$

$$\begin{array}{llll} x_0 = 0 & x_1 = 3 & x_2 = 48 & x_3 = 765 \quad \ldots \\ k_0 = 1 & k_1 = 8 & k_2 = 127 & k_3 = 2024 \quad \ldots \end{array}$$

$$x_n = 16x_{n-1} - x_{n-2}$$

$$k_n = 16k_{n-1} - k_{n-2} = \frac{1}{3}(8x_n - x_{n-1}).$$

329. — *Résoudre en nombres entiers les deux équations :*

$$2x^2 + 7 = K^2 \qquad (1)$$

$$2x^2 - 7 = K^2. \qquad (2)$$

Considérons les deux suites

$$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=4 \quad x_5=8 \quad x_6=9 \quad x_7=19 \quad x_8=22 \quad x_9=46$$
$$x_{10}=53 \quad x_{11}=111 \quad \ldots.$$
$$K_1=3 \quad K_2=1 \quad K_3=5 \quad K_4=5 \quad K_5=11 \quad K_6=13 \quad K_7=27 \quad K_9=31$$
$$K_9=69 \quad K_{10}=75 \quad K_{11}=157 \quad \ldots.$$

A partir du septième terme, les termes de chaque suite s'obtiennent par la formule de récurrence :

$$u_n = 2u_{n-2} + u_{n-4}.$$

Les solutions de (1) sont :

$$(x_1, K_1), \quad (x_3, K_3), \quad (x_6, K_6), \quad (x_7, K_7), \quad (x_{10}, K_{10}), \quad (x_{11}, K_{11}), \quad \ldots.$$
$$(x_{4n+2}, K_{4n+2}), \quad (x_{4n+3}, K_{4n+3}), \quad \ldots.$$

Les solutions de (2) sont :

$$(x_2, K_2), \quad (x_4, K_4), \quad (x_5, K_5), \quad (x_8, K_8), \quad (x_9, K_9) \quad \ldots.$$
$$(x_{4n}, K_{4n}), \quad (x_{4n+1}, K_{4n+1}) \quad \ldots.$$

330. — *Résoudre en nombres entiers les équations :*

$$2x^2 \pm 9 = k^2.$$

Ces équations ont pour solutions celles de $2x^2 \pm 1 = k^2$ où les nombres x et k, ont été multipliés par 3. (Voir *Ex. divers*, n° 323).

331. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$3x^2 - 2 = K^2.$$

On a :

$$x_1=1 \quad x_2=3 \quad x_3=11 \quad x_4=41 \quad x_5=153 \quad \ldots.$$
$$K_1=1 \quad K_2=5 \quad K_3=19 \quad K_5=71 \quad K_5=265 \quad \ldots.$$
$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$$
$$K_n = 4K_{n-1} - K_{n-2}.$$

332. — *Resoudre en nombres entiers l'équation :*

$$8x^2 - 5 = 3y^2.$$

On trouve

$$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=8 \quad x_4=19 \quad x_5=79 \quad x_6=188 \quad \ldots.$$
$$y_1=1 \quad y_2=3 \quad y_3=13 \quad y_4=31 \quad y_5=129 \quad y_6=307 \quad \ldots$$

On a les formules de récurrence :

$$x_{2n+1} = 5x_{2n} - 2x_{2n-1} \qquad y_{2n+1} = 5y_{2n} - 2y_{2n-1}$$
$$x_{2n} = \frac{1}{2}(5x_{2n-1} - x_{n-2}) \qquad y = \frac{1}{2}(5y_{2n-1} - y_{2n-2})$$

333. — *Les équations :*

$$2x^2 \pm 3p = k^2$$

où p *est un entier donné, premier avec* 3, *ou contenant* 3 *à une puissance paire, sont impossibles en nombres entiers.*

CORRESPONDANCE

M. Foucart, élève au lycée Michelet, nous écrit :

« M. Noyer a énoncé (*J. S.*, 1893, p. 44) le théorème suivant :

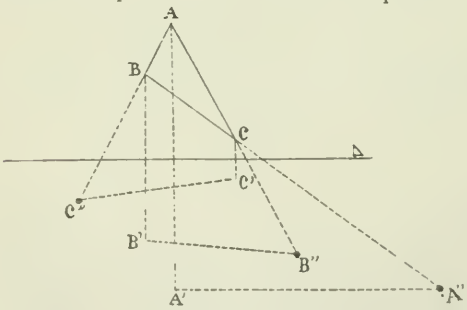
ABC *étant un triangle autopolaire relativement à une parabole*, A′, B′, C′ *étant les symétriques de* A, B, C *par rapport à un diamètre quelconque de cette parabole, les diamètres passant par* A′, B′, C′, *coupent respectivement les côtés* BC, AC, AB *du triangle autopolaire, en trois points qui sont en ligne droite.* »

Cette propriété ne constitue pas, à proprement parler, un théorème sur les triangles autopolaires. Remarquant en effet qu'une droite quelconque tracée dans le plan d'un triangle peut toujours être considérée comme diamètre d'une parabole conjuguée par rapport à ce triangle, le théorème précédent devient :

Étant donnés trois points A, B, C *et une droite* Δ *dans leur plan, les parallèles à* Δ *menées par les symétriques* A′, B′, C′ *de* A, B, C *par rapport à* Δ *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *en trois points en ligne droite.*

La démonstration directe de cette propriété est d'ailleurs facile (*)

(*) Soit ABC le triangle considéré; prenons les symétriques A′, B′, C′ des points A, B, C par rapport à une droite quelconque Δ, prise dans le plan ABC. Les parallèles à Δ, menées par ces points, rencontrent les côtés correspondants de ABC en des points A″, B″, C″.



Il faut reconnaître que ces points sont en ligne droite.

En désignant par α, β, γ les distances des points A, B, C, à Δ, on a

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma},\quad \frac{B''C}{B''A} = \frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha},\quad \frac{C''A}{C''B} = \frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta};$$

et, par conséquent $\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B} = 1.$

etc...

EXAMENS DE SAINT-CYR

Solution de la composition donnée au concours de 1894, par M. l'abbé Reboul, professeur au collège de Belley.

PREMIÈRE QUESTION

I. *On inscrit un cylindre dans une sphère donnée : étudier la variation du volume du solide formé par ce cylindre surmonté, à l'une de ses bases, par l'hémisphère de même rayon que cette base.*

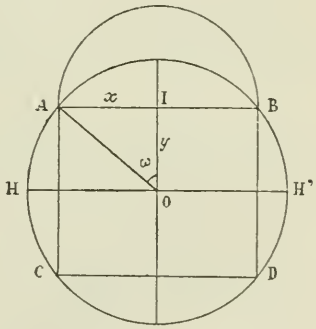
II. *On donne une circonférence* O *et la droite* TAT′, *tangente en* A *à cette circonférence. On considère une seconde tangente qui rencontre la première en* C *et qui touche la circonférence en* B. *La première tangente étant fixe et la seconde variable, on demande : 1° le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle* ABC; *2° le lieu du centre du cercle circonscrit; 3° le lieu du point de rencontre des hauteurs; 4° le lieu du point de rencontre du rayon* OB *avec la perpendiculaire en* C *à la tangente* TAT′.

(Les solutions par la géométrie étant simples, il leur sera donné la préférence.)

Soient O le centre d'un cercle de rayon R, et I un point pris sur un diametre fixe, à une distance y du centre.

En posant AB $= 2x$, le volume V demandé est donné par la formule :

$$V = 2\pi x^2 \left(y + \frac{x}{3}\right).$$



x et y étant liés par l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Posons AOI $= \omega$,

Nous avons

$x = R \sin\omega, \quad y = R \cos\omega.$

et, par conséquent,

$$(1)\ V = \frac{2\pi}{3} R^3 \sin^2\omega (3\cos\omega + \sin\omega).$$

Pour étudier la variation de V, il suffit de faire varier ω de 0 à 90°. Toutes les lignes trigonométriques qui entrent dans l'expression de V seront alors positives.

La dérivée de la fonction qui constitue la partie variable du deuxième membre de l'équation (1) est :

$$\sin^2\omega(-3\sin\omega+\cos\omega)+2\sin\omega\cos\omega(3\cos\omega+\sin\omega)$$

ou, en réduisant,

$$3\sin\omega(2\cos^2\omega-\sin^2\omega+\sin\omega\cos\omega),$$

ou enfin

$$3\sin\omega(2\cos\omega-\sin\omega)(\cos\omega+\sin\omega).$$

Le premier et le dernier facteurs sont positifs. Le signe de la dérivée dépend donc uniquement de celui du facteur $2\cos\omega-\sin\omega$.

La dérivée est donc positive quand $\operatorname{tg}\omega$ varie de 0 à 2. c'est-à-dire quand ω varie de 0 à $63°26'5''$. Alors, le volume V est croissant dans cet intervalle; il est décroissant quand ω varie de $63°26'5''$ à $90°$; il passe par un maximum pour $\operatorname{tg}\omega=2$. Ce volume maximum a pour expression

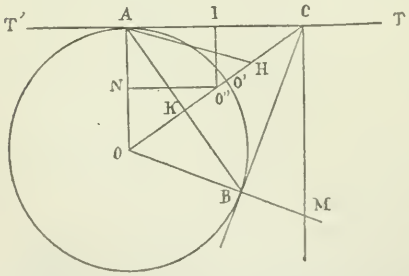
$$V=\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{5}};$$

il correspond à une valeur de

$$y=\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{R}{2.236}.$$

DEUXIÈME QUESTION

1° La bissectrice de l'angle A du triangle ABC passe au point O, milieu de l'arc AB; il en est de même de la bissectrice de l'angle B du même triangle. Donc, le lieu du centre O′ du cercle inscrit au triangle variable ABC n'est autre que l'arc AB.



2° Pour obtenir le centre O″ du cercle circonscrit au triangle isoscèle ABC, il suffit d'abaisser, du point fixe O, une perpendiculaire sur la corde AB; puis, du milieu I de la tangente AC, une perpendiculaire à cette

même tangente; les angles $\widehat{OAC}$ et I étant droits, IO″ est parallèle au rayon OA et égale à sa moitié.

Donc, une parallèle à la tangente fixe AC, menée par le milieu N du rayon fixe OA, est le lieu des centres des cercles circonscrits au triangle variable ABC.

3° Pour obtenir l'orthocentre H du triangle isoscèle ABC, il suffit d'abaisser du point O une perpendiculaire sur la tangente BC.

Les deux triangles AKN et OKB sont égaux; en effet, KA=KB; de plus, les côtés sont parallèles. Par suite, AH=R.

Donc, le lieu des orthocentres du triangle variable ABC est un quadrant décrit, du point fixe A, avec R pour rayon.

4° M étant le point de rencontre de la perpendiculaire en C à la tangente AT et du rayon OB, joignons les points O et C. Le triangle MOC est isoscèle. En effet, OC est une bissectrice de l'angle AOB; par suite, $\widehat{MOC} = \widehat{AOC} = 90° - \widehat{ACO} = \widehat{MCO}$.

Le point M est équidistant de la droite fixe AT et du point fixe O. Le lieu décrit par le point variable M est donc une parabole dont AT est la directrice et O le foyer.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Concours de 1894 (*).

MATHÉMATIQUES

1° Étudier les variations de la fonction

$$x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2.$$

2° Étant donné un angle droit CAB, *trouver :*

a) *Le lieu du pied* D *de la perpendiculaire menée de* A *sur* BC, *lorsque* BC *se déplace de façon que*

$$\frac{AB}{AC} = const.;$$

b) *Le lieu du pied* D, *lorsque* BC *se déplace de façon que*

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{K^2};$$

(*) Questions proposées aux candidats de Rouen.

c) *Le lieu du pied* D, *lorsque* BC *se déplace de façon que*

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{K}.$$

Épure (composition générale).

Une droite oS *de l'espace a pour trace horizontale* o: *la cote de son point* S *égale* 20^{cm}: *sa pente est* 1; *sa projection* os *est parallèle au bord inférieur de la feuille,* o *est à* 14^{cm} *du bord inférieur et à* 9^{cm} *du bord de gauche.*

Le point S *est le sommet d'un cône ayant pour base dans le plan horizontal le cercle de centre* o, *de rayon égal à* 8^{cm}.

La projection horizontale os *de la droite* oS *coupe la circonférence* o *en deux points* m *et* n, *le point* n *étant entre* o *et* s. *Par une droite, de l'espace de pente* 2, *ayant sa trace horizontale au milieu de* om *et coupant la verticale de* o *au-dessus du plan horizontal, passent deux plans* P *et* P_1 *de pente* 4. *Parallèlement à cette même droite et par les horizontales perpendiculaires à* on *en* o *et en* n, *on mène les deux plans* Q *et* Q_1. *Les traces horizontales de ces quatre plans déterminent un trapèze isocèle qui est la base d'un prisme dont les quatre plans forment les faces latérales.*

Représenter la projection du corps opaque commun à ce cône et à ce prisme.

Mener à la projection horizontale des sections du cône par les plans P *et* P_1 *les tangentes parallèles aux côtés du trapèze de base du prisme.*

Coter à l'encre rouge les points de contact de ces tangentes, et les autres points remarquables.

Inutile de tracer à l'encre les lignes de construction d'un point quelconque de la section.

BIBLIOGRAPHIE

Ocagne (Maurice d'), ingénieur des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'Ecole Polytechnique. — **Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques.** (Conférences faites au Conservatoire national des Arts et Métiers les 26 février, 5 et 19 mars 1893). In-8°, avec 38 figures; 1894 (Gauthier-Villars). — 2 fr. 75 c.

La nécessité d'affranchir les diverses branches de l'activité humaine, dans lesquelles le calcul numérique joue un rôle fondamental, des pertes

de temps ainsi que des chances d'erreurs qui l'accompagnent, a donné naissance à une foule de procédés, très curieux pour la plupart et très ingénieux, permettant d'obtenir le résultat des calculs les plus compliqués au moyen d'une opération mécanique ou graphique d'une extrême simplicité.

Ces divers procédés ont fait l'objet de conférences confiées à M. Maurice d'Ocagne, au Conservatoire des Arts et Métiers, conférences réunies dans le présent volume.

L'auteur a classé tous ces procédés dans les groupes suivants: 1° Instruments et machines arithmétiques; 2° Instruments logarithmiques; 3° Tracés graphiques; 4° Tables numériques ou barèmes; 5° Tables graphiques ou abaques.

Dans chacun de ces groupes il a choisi des exemples variés, particulièrement caractéristiques, et en donne une description sommaire, bien que suffisante pour faire nettement ressortir l'économie et l'intérêt de chaque procédé.

Ces descriptions, présentées sous forme d'une causerie dépourvue de tout appareil mathématique, de façon à s'adresser au public en général, sont complétées par de curieuses indications historiques, peu connues pour la plupart.

Il est fort intéressant, en particulier, de voir par quelles transitions a successivement passé le type primitif de la machine de Pascal pour aboutir à celles de Thomas, de Bollée, de Babbage, de Scheutz.... cette dernière *calculant* automatiquement et *imprimant* des Tables de logarithmes!

Le volume contient aussi, sous forme d'une Notice séparée, la première description détaillée qui ait été donnée de la curieuse machine de Tchebichef, à mouvement continu.

Non moins intéressants sont les renseignements fournis sur les instruments (règles, cercles, hélices, cylindres à calcul) fondés sur l'emploi des échelles logarithmiques et que l'auteur ramène à un petit nombre de types bien caractérisés.

On trouve dans la dernière conférence des indications très précises et très détaillées, bien que données sans aucun secours de l'Analyse, sur le mode d'emploi et les avantages des diverses espèces d'abaques dont la théorie générale a été naguère constituée par l'auteur lui-même sous le nom de *Nomographie*.

Arithmétique graphique. *Les espaces arithmétiques hypermagiques*, par Gabriel Arnoux, ancien officier de marine. Un volume grand in-8°, de XXIII-175 pages, avec une planche coloriée et de nombreuses figures; 1894. Prix: papier hollande, **12** fr; vélin, **6** fr.

La question des *carrés magiques* semble avoir préoccupé la curiosité humaine depuis les temps les plus reculés. Dans ces derniers siècles, elle a provoqué des travaux mathématiques fort remarquables, et des recherches empiriques plus nombreuses encore peut-être.

L'étude de M. Arnoux semble apporter à cette théorie une contribution des plus intéressantes. Il s'est donné à tâche, non plus de trouver des procédés plus ou moins ingénieux pour construire des carrés magiques, mais de donner un caractère méthodique à ces études, et de généraliser autant que possible le problème, qu'il étend aux espaces à un nombre quelconque de dimensions.

L'auteur est moins préoccupé du côté mathématique de la question que des méthodes elles-mêmes dont il a fait usage, ainsi que l'indique le titre général qui précède son livre : *Essais de psychologie et de métaphysique positives*. Quelques lignes de sa Préface éclairciront ce point :

« Le livre que j'ai l'honneur de présenter au public, dit-il, n'est pas, à proprement parler, un travail mathématique : il a été entrepris dans un double but :

1° Me rendre compte, par une expérience sur ma personne, de la valeur des études de psychologie positive auxquelles je me suis adonné depuis longtemps, en observant ce qui se passe dans le cerveau d'un vieillard qui invente ;

2° Mesurer la puissance théorique et pratique de l'analyse métaphysique, et voir si l'on ne pourrait pas la considérer comme une science suprême qui, indifférente aux sujets auxquels on l'applique, domine et crée pour ainsi dire toutes les sciences spéciales, leur donnant à la fois la sanction et l'existence.

. . . . . .

« Je recommande ma méthode à ceux qui inventent, dit l'auteur en terminant ; c'est le seul moyen de faire quelque chose d'original et de sortir de l'ornière, en se dégageant des idées reçues. L'histoire tout entière des sciences est là pour montrer l'influence funeste des doctrines orthodoxes ; il existe une sorte de moule officiel dont on varie peut-être les détails, mais dont le fond est immuable : on tourne dans un manège, sur une piste. Comme l'a si bien dit M. Charles Richet dans la belle leçon d'ouverture de son cours de Physiologie : « En fait de science, il faut être révolutionnaire. »

QUESTIONS PROPOSÉES

562. — On donne un cercle et un carré qui lui est circonscrit, dont les côtés opposés sont A et A′, B et B′. On joint le point de contact de A aux points où les côtés B et B′ sont rencontrés par une tangente arbitraire T à la circonférence. Démontrer que ces droites interceptent sur A′ un segment égal au côté du carré. *(Mannheim.)*

563. — La normale en un point M quelconque d'une ellipse, de foyers F et F′, rencontre le grand axe en P et le petit axe en Q. Soient φ et φ' les symétriques de F et F′ par rapport à la normale.

Montrer que les quadrilatères $PQ\varphi'F$ et $PQF'\varphi$ sont inscriptibles à un cercle. *(E.-N. Barisien.)*

Le Directeur-gérant.
G. DE LONCHAMPS.

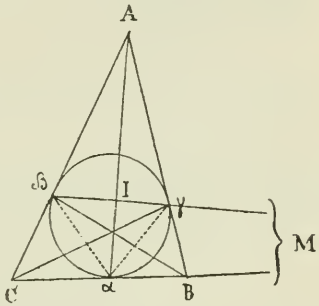
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13292-6-94.

NOTES SUR LES SYMÉDIANES

Par M. **Joseph Dhavernas**, élève du lycée Michelet.

I. — *Dans tout triangle, le point de Gergonne est le point de Lemoine du triangle formé par les points de contact du cercle avec les côtés.*

Soient le triangle ABC et α, β, γ les points de contact des côtés avec le cercle inscrit; soient I, M les points où $\gamma\beta$ coupe $A\alpha$ et BC, M étant le pôle de $A\alpha$, la division $M\beta I\gamma$ est harmonique : il en est donc de même du faisceau $\alpha(M\gamma I\beta)$; ce qui montre que $A\alpha$ est une symédiane du triangle $\alpha\beta\gamma$; on verrait de même que $B\beta$, $C\gamma$ en sont les deux autres symédianes. La proposition se démontre aussi très simplement en établissant que



$$\frac{I\gamma}{I\beta} = \frac{\overline{\alpha\gamma}^2}{\overline{\alpha\beta}^2}.$$

II. — *La corde commune au cercle circonscrit à un triangle et au cercle qui a pour diamètre la ligne joignant les pieds des bissectrices issues d'un même sommet* (ou corde d'Apollonius) *est la symédiane de ce sommet.*

Considérons le triangle ABC; soient a, b, c les longueurs de ses trois côtés, AD, AD′ les bissectrices issues de A; ω, le milieu de DD′, AI la médiane relative au côté BC, et AM la corde commune aux cercles ABC et ADD′.

Le quadrilatère inscriptible ABMC donne

$$c.MC + b.MB = AM.BC$$

ou, comme $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{c}{b}$ et $BC = 2BI$,

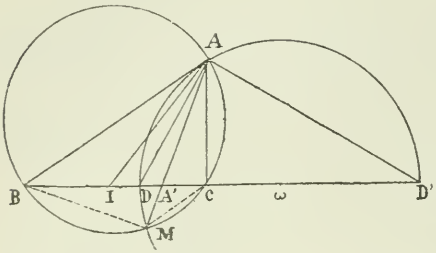
$$\frac{MC}{AM} = \frac{BI}{AB}.$$

Les triangles ABI, AMC ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables et $\widehat{BAI} = \widehat{MAC}$,

ce qui montre que AM est la symédiane de A. On peut établir aussi très simplement la proposition, en observant que le point A′, pied de la symédiane partant de A, est un point d'égale puissance

$$\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}$$

par rapport au cercle ABC et au cercle d'Apollonius.



La transformation continue appliquée au théorème précédent démontre que :

Le point de Gergonne d'un des cercles ex-inscrits est le point de Lemoine du triangle qui a pour sommets les points de contact de ce cercle avec les côtés de ABC.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 126.)

334. — *On ne peut résoudre en nombres entiers les équations :*

(1) $2x^2 \pm 5p = k^2$,

(2) $3x^2 + p = k^2$,

(3) $3x^2 - p = k^2$,

(4) $3x^2 + 7p = 2y^2$,

(5) $22x^2 - 23p = y^2$,

lorsque p *vérifie les conditions suivantes :*

1° (*) Quand p *est premier avec* 5, *ou le contient à une puissance paire;*

2° Si p *contient* 3 *a une puissance impaire, ou est un entier positif de la forme* 3m + 1 *;*

3° Si p *est un entier positif de la forme* 3m − 1 *;*

4° Si p *est un entier positif premier avec* 7, *ou le contenant à une puissance paire;*

5° Si p *est un entier premier positif avec* 23 *ou le contenant à une puissance paire.*

(*) La condition 1e se rapporte à l'équation (1), et ainsi des autres.

335. — *On considère la suite :*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = z + 1 \quad \ldots \quad u_n = (z + 1)u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Calculer u_n *en fonction de* z.

On trouve :

$$u_n = (z+1)^n + (n-1)(z+1)^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}(z+1)^{n-2p} + .$$

en développant :

$$u_n = z^n + nz^{n-1} + \frac{(n-1)(n+2)}{1.2}z^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)(n+6)}{1.2.3}z^{n-}$$
$$+ \frac{n(n-2)(n-3)(n+11)}{1.2.3.4}z^{n-4} + \ldots$$

La fonction u_n' satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$(z^2 + 2z + 5)\frac{d^2u_n}{dz^2} + 3(z+1)\frac{du_n}{dz} - n(n+2)u_n = 0,$$

d'où l'on déduit pour calculer les coefficients des diverses puissances de z (A_p coefficient de z^{n-p}), la formule de récurrence :

$$p(p-2n-2)A_p + (n-p+1)(2n-2p+3)A_{p-1}$$
$$+ 5(n-p+1)(n-p+2)A_{p-2} = 0.$$

336. — *On considère la suite :*

$$X_0 = 1 \quad X_1 = x + 1 \quad X_2 = x^2 + 3x + 1 \quad \ldots$$
$$X_n = (x+2)X_{n-1} - X_{n-2}.$$

Calculer X_n *en fonction de* x.

On trouve :

$$X_n = x^n + (2n-1)x^{n-1} + (n-1)(2n-3)x^{n-2} +$$
$$+ (n-2)\frac{(2n-3)(2n-5)}{1.3}x^{n-3} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}x + 1,$$

cette fonction satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$(x^2 + 4x)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2(x+1)\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0,$$

d'où, pour calculer A_p (coefficient de x^{n-p}), la formule de récurrence :

$$A_p = \frac{2(n-p+1)(2n-2p+1)}{p(2n-p+1)}A_{p-1},$$

$$A_{2K} = \frac{(n-K)(n-K-1)\ldots(n-2K+1)}{1.2.3\ldots K} \cdot \frac{(2n-2K-1)(2n-2K-3)\ldots(2n-4K+1)}{1.3.5.7\ldots(2K-1)}$$

$$A_{2K+1} = \frac{(n-K-1)(n-K-2)\ldots(n-2K)}{1.2.3\ldots K} \cdot \frac{(2n-2K-1)(2n-2K-3)\ldots(2n-4K-1)}{1.3.5.7\ldots(2K+1)}$$

ou encore plus simplement le coefficient de x^m,

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m)}{1.2.3.4\ldots 2m}.$$

BIBLIOGRAPHIE

Cours de Géométrie. *A l'usage des élèves de l'enseignement primaire supérieur*, par M. H. Andoyer, maître de conférences et chargé d'un cours complémentaire, à la Faculté des Sciences de Paris. Ouvrage rédigé conformément au programme officiel de 1893 et précédé d'une préface de M. J. Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'Ecole normale supérieure.

Je me proposais de rendre compte du livre excellent que vient de faire M. Andoyer quand j'ai réfléchi que rien ne pourrait, mieux que la préface de cet ouvrage, le faire connaître et donner l'idée de l'intérêt particulier qui s'attache à ce livre. En publiant ici cette préface, qui soulève tant de questions intéressantes et qui les discute dans une forme si remarquable, j'ai eu un autre but: celui de propager les idées, à mon avis parfaites, qu'elle expose. Il existe, en tête des programmes scientifiques, trois lignes qui émanent, on le sait, du Conseil supérieur. Ces lignes ont été, en général, mal interprétées. Il importe, que l'*usage des livres*, qui a été systématiquement écarté par la plupart des professeurs, soit, dans l'intérêt de l'enseignement, mieux compris. La préface qu'on va lire, en commentant les trois lignes auxquelles nous venons de faire allusion, répond on ne peut mieux à cette nécessité. G. L.

« En ouvrant cette nouvelle « Géométrie », que M. Andoyer a écrite, pour les élèves des *Écoles primaires supérieures*, plus d'un lecteur, peut-être, se demandera tout d'abord en quoi cette Géométrie diffère des autres, et si elle s'adresse à ces élèves-là plutôt qu'à d'autres; j'essaierai, tout à l'heure, de répondre à ces questions; je voudrais aussi m'expliquer sur les *ressemblances* que ce livre présente avec d'autres ouvrages, faits sur le même sujet, pour une autre catégorie d'élèves, et sur la façon dont, à ce que je crois, un maître peut se servir d'un livre, dans l'enseignement des sciences.

» Ces ressemblances, tout d'abord, faut-il tant les regretter? Tout doit-il différer dans les différents ordres de notre enseignement, et faut-il enfermer dans une muraille qu'on ne doit franchir ni d'un côté, ni de l'autre, tout ce qui se rapporte à l'enseignement primaire, idées, méthodes, livres, élèves et maîtres? A coup sûr, ceux qui ont essayé d'organiser l'enseignement primaire supérieur ne l'ont pas cru : ils pensent, probablement, que l'égalité est une chimère, mais ils ne seraient pas fâchés s'ils réussissaient à réaliser quelque continuité, au moins dans les intelligences. Le jour où cette continuité existerait, où chacun trouverait à côté de soi, un peu au-dessus, ou un peu au-dessous, quelqu'un qui le comprît, qui parlât sa langue, qui s'intéressât aux mêmes idées, qui eût des aspirations voisines des siennes, le jour où l'on ne saurait plus distinguer entre les classes sociales, ces classes auraient peut-être cessé d'exister.

» Quoi qu'il en soit, pour ce qui est des sujets scientifiques, il y a deux manières de les enseigner. On peut se borner à décrire des faits, des résultats, à faire apprendre des règles. C'est cette marche que l'on suit quand on s'adresse à des enfants qui ne peuvent prolonger leurs études

et que les nécessités de la vie guettent au sortir de l'école : on court au plus pressé, on leur donne les armes indispensables; on choisit parmi les résultats acquis ceux qui ont le plus d'importance pratique, et l'on s'efforce de les faire comprendre en eux-mêmes, sans en expliquer l'enchaînement, sans en exposer la théorie. Posséder ces résultats, ce n'est pas rien : il n'est pas inutile de savoir comment on fait une division, comment on mesure un champ, ni de savoir que les eaux souillées sont le véhicule de certaines maladies, si même on ignore les théories de l'arithmétique, de la géométrie, ou de la microbiologie. Mais si ces connaissances sont très utiles dans la vie, quand elles restent isolées, elles servent peu pour le développement de l'intelligence.

» C'est ce développement de l'intelligence, en même temps que les connaissances utiles, que l'on a eu en vue en créant les écoles primaires supérieures; dès lors, en organisant ce nouvel enseignement, on ne pouvait demander aux maîtres de se borner à la pure affirmation des faits, à de simples énoncés, à des règles mécaniques : on a voulu que les faits, les énoncés, les règles fussent reliés, enchaînés, justifiés : cela, c'est de la théorie. Et la théorie, malgré tout, on ne peut guère la changer : voici plus de deux mille ans qu'on enseigne la géométrie; les efforts des savants et des professeurs n'ont changé que peu de chose à cet enseignement. C'est, si je ne me trompe, un pédagogue grec qui répondait aux plaintes de je ne sais quel prince, son élève : « Il n'y a pas de chemin royal en géométrie. » Aujourd'hui encore, la géométrie ne connaît pas de classes sociales; il n'y a pas une géométrie particulière pour les petits nobles, les petits bourgeois ou les enfants du peuple : tous ceux qui l'apprennent doivent se fatiguer aux mêmes abstractions, aux mêmes subtilités, peiner dans le même chemin aride, tortueux et encombré dans les commencements; tous doivent avoir confiance dans le maître quand il dit que le but vaut bien le mal qu'on se donne pour l'atteindre.

» Ceux qui ont rédigé les programmes avaient bien conscience de ces difficultés; ils n'ignoraient pas que les élèves pour lesquels ils travaillaient n'avaient point une vie à consacrer à des spéculations curieuses ou sublimes; ils n'ont pas cherché à donner à ces élèves le goût de ces spéculations; ils ont simplifié de leur mieux, élagué ce qu'ils ont pu; il y avait une limite qu'ils ne pouvaient dépasser; j'ajoute qu'ils sont restés un peu en deçà.

» Ils n'avaient pas, en effet, à tenir seulement compte de la nature même des choses, pour réduire les programmes à ce qu'ils jugeaient strictement nécessaire. On se plaint souvent, et non sans raison, de l'élévation de ces programmes, de leur longueur, de leur uniformité. Les besoins sont-ils les mêmes partout ? Suivant les carrières auxquelles se destinent les jeunes gens, ne vaudrait-il pas mieux développer ici l'arithmétique et la géométrie, là la physique ou la chimie, ou l'histoire naturelle? Ne vaudrait-il pas mieux laisser les maîtres juges des besoins, des aptitudes de leurs élèves : pourquoi leur imposer partout, du nord au midi, les mêmes programmes, les mêmes heures d'enseignement ? La réponse à ces questions ne serait pas douteuse s'il n'y avait ni examens, ni concours. Mais peut-on, par exemple, supprimer les concours aux écoles professionnelles? N'est-il pas juste que n'importe quel enfant, où qu'il soit né, puisse s'y préparer s'il est intelligent et laborieux ? Ces concours ont des programmes très élevés, parfois, peut-être, trop élevés; il fallait bien en tenir compte, même pour ceux des élèves qui ne sont pas encore dans la section qui prépare

directement aux concours : s'ils ne sont pas encore dans cette section, ils y entreront, peut-être, l'an prochain ; il faut discerner ceux qui seront capables de le faire, les y aider ; malgré tout, préparer quelqu'un à entrer dans une classe qui prépare à une école, c'est déjà le préparer un peu à cette école.

» Voilà pourquoi les programmes de l'enseignement primaire supérieur sont un peu plus élevés, peut-être, que quelques bons esprits ne l'auraient souhaité, pourquoi l'on trouve dans la Géométrie de M. Andoyer ce que l'on trouve dans d'autres géométries, et pourquoi elle est plus grosse que l'auteur ne l'aurait voulu.

» Ce livre, pourtant, a été bien réellement écrit pour les élèves des écoles : on sent que l'auteur est constamment préoccupé de l'application, et de l'application précise, prochaine, immédiate. Trop souvent, le professeur qui enseigne les éléments de la géométrie n'a en vue que le développement des théories ultérieures ; c'est à ces théories qu'il a hâte d'arriver pour s'y mouvoir plus à l'aise. Il ne s'attarde point à montrer, à chaque pas, tout le parti qu'on peut tirer de ce qu'on vient d'apprendre ; il dédaigne les petites applications qu'on en peut faire et qui n'ont pas grand intérêt pour lui. Ce dédain est souvent excessif, lors même que l'enseignement des éléments n'a pour but que d'initier les élèves aux parties plus élevées de la science. Quand l'élève vient d'appliquer un théorème à un exemple, il se rend tout ou moins un compte très exact de son énoncé ; après quelques applications de ce genre, l'énoncé se fixe dans son esprit, avec une signification précise : l'élève en sait non seulement les termes, mais la portée ; il pourra, de temps en temps, oublier une démonstration, le fait lui-même restera gravé dans sa tête : c'est là ce qui importe. M. Andoyer a, en particulier, multiplié les applications numériques, et j'ajouterai qu'il en a traité un grand nombre avec un soin extrême. Beaucoup des élèves qui auront son livre entre les mains ne se préoccuperont guère de savoir que l'auteur est un excellent astronome, leurs professeurs ne pourront manquer de s'apercevoir qu'ils ont affaire à quelqu'un qui sait ce que c'est qu'un calcul numérique, qui sait ce que l'on peut faire sortir des données et comment on peut en tirer le meilleur parti. Cette science-là est plus rare qu'on ne croit. Qu'on lise, par exemple, les *Notions de trigonométrie*, qui figurent, comme le veulent d'ailleurs les programmes, à la fin de la géométrie plane. L'élève qui aura bien compris ces trente petites pages sera réellement en mesure de résoudre un triangle : il connaîtra les précautions qu'il faut prendre pour avoir des résultats aussi approchés que les données le comportent. A la fin du volume, il trouvera une petite table qui lui donnera les valeurs naturelles des six lignes trigonométriques, avec une précision très suffisante pour les besoins de la pratique, puisqu'elles permettent d'avoir un angle à une minute près. Et pourquoi, dira-t-on, les six lignes trigonométriques ? Le sinus le cosinus et la tangente ne suffisaient-ils pas ? Oui, sans doute, au point de vue théorique ; mais, quand on veut faire un calcul numérique, il n'est pas sans intérêt d'éviter les divisions et de les remplacer par des multiplications ; voilà pourquoi M. Andoyer a fait figurer dans sa table les inverses du sinus, du cosinus et de la tangente. Il y a dans nos écoles, aussi bien qu'ailleurs, des enfants qui ont la curiosité éveillée ; quelques-uns se demanderont sans doute comment on peut construire une pareille table ; ils trouveront la réponse dans leur *Géométrie*. Il ne pouvait être question d'expliquer comment on la construit réellement, ni même de

répéter les explications, longues et surannées, que l'on donne habituellement, à ce sujet, dans les trigonométries; c'est cependant une grande satisfaction pour l'esprit que de comprendre tout au moins la possibilité de résoudre le problème: M. Andoyer s'est donné la peine d'expliquer comment, par le même procédé qui peut servir à calculer la longueur de la circonférence d'un cercle dont on connaît le rayon, on peut aussi calculer la longueur d'un arc dont on connaît la corde, ou, inversement, la longueur de la corde qui sous-tend un arc que l'on connaît en degrés, minutes et secondes.

» Et maintenant, comment faut-il se servir de ce livre? On me permettra de dire d'abord, en général, comment, à mon avis, on doit se servir des livres de l'enseignement des sciences. C'est une grosse question que celle-là, et qui a bien des côtés.

» Quelques-uns rejettent absolument les livres: l'enseignement, disent-ils, doit être exclusivement oral; rien ne vaut la parole du maître, la parole vivante, qui prête sa vie aux choses, qui se précipite quand il s'agit de choses aisées ou déjà sues, qui devient lente, solennelle au besoin, quand il s'agit de vérités plus difficiles ou plus importantes, qui se colore, revêt toutes les nuances, se refroidit ou s'échauffe, qui se renouvelle et recommence, jusqu'à ce que le maître voie dans l'attitude de ses élèves qu'ils ont compris ce qu'on leur enseigne, Et l'on ajoute: si le maître est lié par un texte, quelle personnalité mettra-t-il dans son enseignement, quel intérêt y apportera-t-il? L'enseignement sera figé dans un moule uniforme et invariable; il ne s'y réalisera plus aucun progrès. Ne dédaignez pas ces progrès; leur somme n'est pas négligeable; il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à ce qu'était l'enseignement scientifique il y a trente ou quarante ans; et puis, ils rehaussent le professeur à ses propres yeux, ils lui donnent l'illusion d'être un savant; quand il retournera dans sa classe, après avoir « arrangé » ingénieusement quelque démonstration, il apportera dans sa leçon une ardeur, une joie intellectuelle qui se communiquera à ses élèves et dont ils profiteront: ceux-ci ne seront pas sans remarquer ce que leur maître leur a apporté de nouveau; son autorité grandira, et l'autorité du maître, c'est la certitude du succès.

» Tout cela est vrai, tellement vrai qu'il faut dire tout d'abord que le professeur qui préfère donner un enseignement exclusivement oral doit rester libre de le faire; il y a longtemps que cet enseignement, dont l'habitude est entrée dans nos mœurs scolaires, donne de bons résultats; personne ne souhaite qu'il disparaisse.

» Mais il convient de regarder d'autres faces de la question.

Il y a sur les diverses matières scientifiques de bons livres faits avec soin et conscience par des professeurs éprouvés, quelquefois par de vrais savants, qui n'ont pas dédaigné de montrer qu'ils s'intéressaient à l'enseignement. Les professeurs qui enseignent dans les écoles, dans les collèges, dans les lycées, se croient-ils supérieurs à ces auteurs? Assurément non: sur quelques points particuliers, sans doute, ils peuvent mieux faire; mais pour le fond, pour l'ensemble, ils n'ont nullement cette prétention. Or, en fait, le prétendu enseignement oral consiste très souvent à substituer tout simplement un cours *dicté* à un livre imprimé. Est-il vrai que le professeur précipite ou ralentisse sa parole, qu'il en change l'expression, qu'il en nuance le timbre? Non, il parle, malgré lui, d'une façon égale et monotone, parce que, autrement, les élèves ne pourraient

pas *prendre de notes*. Prendre des notes, cela sonne bien : c'est écrire sous la dictée qu'il faut entendre. Et comment les élèves feraient-ils autrement? Prendre des notes, c'est choisir dans ce que le maître dit, c'est juger ce qu'il dit. Pour cela, il faudrait déjà savoir, ou au moins tout comprendre avec une sûreté et une rapidité qu'il est déraisonnable de demander aux commençants : on peut, tout au plus, essayer de leur donner lentement, petit à petit, une habitude assurément précieuse : il y faut beaucoup de patience et de talent, et il convient d'ajouter que l'habitude de prendre des notes n'acquiert tout son prix que pour ceux qui suivront plus tard un enseignement élevé, où la leçon orale s'impose. Donc, trop souvent, le maître parle sans accent : s'il s'échauffe, l'élève docile, qui ne peut le suivre, pose sa plume et regarde la bouche bée, d'autres frottent le plancher de leurs pieds; le maître sourit ou se fâche, et reprend son ton égal et monotone; alors l'élève, satisfait de pouvoir écrire à son aise, aligne machinalement ses mots et suit la dictée sans écouter autrement la parole qui le berce et endort son activité; plus tard, il essaiera de comprendre, de comprendre ce qu'il y a dans un cahier, au lieu de comprendre ce qui est dans un livre ; où est le bénéfice, et ne m'a-t-on pas accordé que, en général, le livre vaut bien ce qu'il y a dans le cahier? Pour le travail personnel, pour l'activité intellectuelle, la classe a été entièrement perdue. et la vertu propre de l'enseignement oral, que l'on vantait tant, s'est trouvée nulle.

» Mais, parmi ceux qui préconisent l'usage des livres, qui donc a jamais parlé de supprimer cet enseignement? Qui a jamais conseillé au maître, quel qu'il soit, de dire à ses élèves : « Pour la prochaine leçon, » vous apprendrez de la page tant à la page tant, » et de leur faire réciter ensuite cette leçon, comme s'il s'agissait d'une fable de La Fontaine? Je ne crois pas, pour ma part, que l'usage bien entendu d'un livre favorise en rien la paresse du maître.

» Que celui-ci, tout d'abord, choisisse un livre qui lui plaise, en général; s'il y a quelques pages, ici ou là, qui ne soient pas de son goût, ce n'est pas un grave inconvénient. Qu'il explique ensuite ce livre; ce sera la vraie leçon; pendant ce temps, les élèves ne prendront que quelques notes, très courtes; ils feront, de leur côté, les calculs ou les figures. Le maître parlera à son aise, sans être gêné par le bruit égal des plumes qui courent sur le papier, ou par les silences soudains qui se font parfois : il parlera en *mettant le ton*. Qu'il regarde ses élèves, pour voir s'ils comprennent, et non s'ils écrivent; qu'il recommence s'il n'est pas compris; qu'il développe ou qu'il abrège, suivant les cas. Qu'il s'interrompe, qu'il fasse reprendre ou continuer une démonstration, qu'il fasse collaborer ses élèves à son enseignement. Ceux-ci, au sortir de la classe, sauront à moitié leur leçon; en relisant leur livre, où les choses sont dites d'une façon peut-être plus sèche et plus concise, les explications de leur maître se représenteront à leur esprit, l'accent de sa parole retentira encore à leurs oreilles, ils comprendront, ils sauront bientôt. A la leçon suivante, le maître interrogera; il s'assurera que la leçon précédente est bien sue, bien comprise; il fera faire des applications, des problèmes; il en aura le temps qui, autrement, lui manquait. Aura-t-il moins de peine que s'il avait *dicté* son cours? Tous ceux qui ont un peu la pratique de l'enseignement savent bien le contraire : rien n'est plus fatigant que d'interroger, de suivre à la fois sa propre pensée et celle des autres.

» Et si, parfois, le maître juge qu'une démonstration de son auteur est mauvaise ou imparfaite, lui sera-t-il défendu de la changer, et de trouver là cette légitime satisfaction d'amour-propre, cet accroissement de la confiance de ses élèves dont on parlait plus haut? En aucune façon, et, s'il a beaucoup d'originalité dans l'esprit, ou qu'aucun livre ne le satisfasse, qu'il en compose un lui-même, ou bien qu'il fasse autographier son cours; tout cela est souhaitable.

» Je vais un peu plus loin encore; quand les élèves sont déjà entraînés, quand le sujet est débrouillé ou facile, je trouve bon que le maître leur fasse apprendre dans le livre des choses qu'il n'a pas expliquées, soit qu'il ait consacré la temps de sa leçon à expliquer un point particulier sur lequel il voulait insister davantage, soit même qu'il n'ait fait aucune leçon. Il importe d'habituer les élèves à apprendre les choses dans un livre, seuls, sans le secours du maître. Cela est bien plus important encore que de savoir prendre des notes. Leurs maîtres, les élèves vont les quitter; ne devront-ils plus accroître leurs connaissances, ou même, tout simplement, apprendre à nouveau ce qu'ils ont déjà appris? Ils n'auront plus d'autre ressource que le livre, le livre muet. Apprenez-leur donc à s'en servir, et hâtez-vous, le temps que vous avez à donner à vos élèves a été compté; bientôt, elle va leur manquer, cette merveilleuse suggestion de la parole du maître, de cette parole qui pénètre les durs cervaux, qui les fait vibrer, qui fait croire qu'ils pensent à ceux qui écoutent. J'ai rencontré, plus d'une fois, des jeunes gens à qui cette suggestion avait été fatale, qui, habitués à un enseignement oral trop parfait, en avaient gardé une sorte de paresse intellectuelle, à qui l'excitation de la parole du maître manquait, comme celle de l'alcool au buveur, et qui ne trouvaient plus aucun goût à la science des livres.

» J'ajouterai que l'usage du livre permet de donner à l'enseignement plus de souplesse. Le maître qui fait sa leçon, et qui entend que les élèves se bornent à cette leçon, est obligé de la composer pour la moyenne de ses auditeurs: pour une bonne partie de ses élèves, il dépasse la mesure, ou ne l'atteint pas. S'il se sert d'un livre, il peut doser la matière suivant les intelligences et le but à atteindre, dire aux uns « vous » apprendrez ceci », aux autres, « vous pourrez passer cela ».

» Dans ces conditions, l'usage d'un livre n'a pas d'inconvénient, même s'il est un peu trop complet, et le maître, s'il a quelque psychologie et quelque initiative, peut remédier à l'uniformité des programmes.

» Je n'ai plus que quelques mots à ajouter, et qui concernent particulièrement le livre de M. Andoyer: il est précisément de ceux qui ne dépassent pas les programmes, mais qui ne restent pas au-dessous, et ce que je viens de dire, en général, trouve ici son application. Le maître, en général, devra *choisir*, indiquer à ses élèves, qui ne peuvent le savoir, ce qui est essentiel, indispensable, et ce qui est d'ordre plus élevé : il examinera attentivement les *Exercices*, auxquels l'auteur a apporté un soin très particulier; il dira à tous, « faites ces applications qui sont faciles, » à quelques-uns, « acharnez-vous après ces problèmes, vous ne perdrez » pas votre temps et vous aiguiserez votre esprit, vous accroîtrez vos » forces ». Il aura parfois à développer certaines remarques, qui ne sont, sous une forme modeste, ni sans philosophie, ni sans profondeur. Qu'il lise, par exemple, les premières pages, et il trouvera quelques principes de logique scientifique, qui ne présenteront pour lui aucune difficulté, mais qui effraieront peut-être un débutant. Il rassurera ce dernier, il lui

dira, « attendez un peu, allez en avant, et nous verrons bientôt, à l'occa- » sion, ce que l'auteur a voulu dire, pourquoi il a placé ces remarques » au début, et comment elles évitent d'ennuyeuses et de continuelles » redites ». Ce livre, composé par un véritable savant, n'est pas fait pour que l'élève se passe du maître; que celui-ci s'en convainque, et je suis sûr qu'il tirera le meilleur parti de la Géométrie de M. Andoyer. »

BACCALAURÉATS

(BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES)

Académie de Paris.

1° *Problème obligatoire :* Deux cônes inscrits dans une sphère donnée ont leurs sommets A et B en deux points diamétralement oppo és de cette sphère; ils ont même base, et cette base est un petit cercle de la sphère ayant pour centre E et pour rayon CE.

On pose : $CE = x$, $AB =$ diamètre de la sphère $= 2R$.

On demande de calculer x de telle façon que le produit des surfaces latérales des deux cônes soit égal à l^4, l étant une longueur donnée. Discuter.

2° *Trois questions à choisir :*

(*a*) Distance d'un point à un plan en géométrie descriptive.

(*b*) Angle de deux plans en géométrie descriptive.

(*c*) Distance d'un point à une droite en géométrie descriptive.

Session de juillet 1893.

Académie d'Aix.

I. — Une suite de sphères homogènes C, C′, C″ ... en nombre illimité et tangentes extérieurement sont inscrites dans un même cône de révolution dont l'ouverture est 2ω.

La distance a du sommet S du cône au centre C de la sphère la plus éloignée est connue. On demande :

1° D'exprimer, au moyen de a et de ω, la distance x du sommet du cône au centre de gravité de l'ensemble des sphères. On devra trouver en particulier que, pour $\omega = 30°$, $x = 39/40\ a$;

2° Ce que devient x pour $\omega = 0°$ et pour $\omega = 90°$;

3° De montrer que, quand ω varie de 0° à 90°, x va toujours en augmentant.

II. — Calculer les périmètres des polygones réguliers convexes de douze côtés inscrits et circonscrits à un même cercle de rayon R.

En déduire une valeur supérieure et une valeur inférieure au nombre π, rapport de la circonférence au diamètre.

Déterminer a de manière que l'expression $\dfrac{x^2 + 2ax + 3}{x^2 + 2x + 2}$ ne puisse prendre aucune valeur supérieure à 2 et représenter cette expression par une courbe lorsque a aura l'une des valeurs qui satisfont à la condition précédente.

III. — A un point O fixe est attaché un fil inextensible OA dont on néglige le poids. Ce fil a 1 mètre de longueur. En A est attaché un poids P de 10 kilogrammes;

1° On demande quelle force horizontale F il faut appliquer en A pour que, dans la position d'équilibre, la distance du point A à la verticale du point O soit égale à 60 centimètres;

2° En supposant qu'on applique en A cette force F qu'on vient de calculer, ainsi que le poids P, on demande quelle force horizontale il faudrait appliquer au milieu B de OA pour que ce point milieu soit ramené sur la verticale du point O et l'on demande quelle sera, alors, la distance du point A à cette verticale.

Académie d'Alger.

I. — 1° *Question commune à tous les candidats.* — Trouver sur la base d'un triangle un point tel que la somme des carrés de ses distances aux deux autres côtés ait une valeur donnée m. Discuter la solution.

2° *Questions à choisir :* 1° Angle de deux plans, cas particulier où l'un des plans est vertical; 2° Angle d'une droite et d'un plan. Cas particulier où la droite est verticale; 3° Distance d'un point à une droite. Cas particulier où la droite est horizontale.

II. — *Questions à choisir :* Variation de la fonction $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; 2° Inégalité des jours et des nuits; 3° Section plane du cône de révolution (méthode de Dandelin).

2° *Question obligatoire.* Le 11 juillet, à midi moyen, la déclinaison du soleil est boréale et égale à 22°4′ : 1° Indiquer pour quel point de la terre le soleil ne se couche pas ce jour-là; 2° Donner, en un point de latitude $\lambda = 36°22'$ la longueur de l'ombre que projette à midi une tige verticale de 1 mètre.

III. — *Question commune à tous les candidats.* Dans un triangle OMA on donne la base OA = 1 mètre et l'angle MOA = α, puis l'on construit sur les côtés OM et MA deux carrés OPQM et MRSA. On demande la longueur x que doit avoir OM pour que le contour OPQMRSAO enveloppe une surface donnée m. Discuter la solution en examinant les différentes valeurs de l'angle α.

2° *Questions à choisir :* 1° La déclinaison du soleil est de 22°30′ nord, et l'ombre d'une tour de 20 mètres de hauteur située dans l'hémisphère nord est de $8^m,50$ à midi vrai, on demande la latitude du lieu où elle se trouve? 2° Indiquer les instruments nécessaires et la méthode à suivre pour déterminer la longitude et la latitude d'un lieu donné; 3° Enoncer les lois de Kepler. Comment a-t-on procédé pour vérifier la loi des aires dans le mouvement de la terre autour du soleil?

Académie de Rennes.

I. — 1° Condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier et rationnel par rapport à x $P = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$ soit divisible exactement par $x - a$. Forme du reste de la division quand il y en a un.

2° Sur le diamètre de base AB d'un demi-cercle ADEB on construit un triangle isoscèle ACB de hauteur OC = AB = 2R.

Trouver :

1° L'expression de l'aire du trapèze ADEB;

2° A quelle distance de AB il faut lui mener une parallèle FG pour que la différence FG — HK ait une valeur donnée. Discussion, maximum.

II. — Calculer $\sin x/2$ et $\cos x/2$ connaissant $\sin x$. Nombre et interprétation des solutions.

2° On donne deux circonférences o, o' tangentes en A. Trouver, en fonction de l'angle $xAB = x$:

(*a*) La longueur de la droite BB′ qui, s'appuyant par ses extrémités sur les deux circonférences, serait vue du point A sous un angle droit et, (*b*) son angle avec Ax. Maximum et minimum de cette droite. Lieu des milieux de BB′ quand on fait varier x.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — *Choisir entre les trois questions suivantes :*

1° Résolution et discussion de l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c$$

où a, b, c désignent trois nombres réels;

2° Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Discussion.

3° Trouver tang $a/2$ connaissant tang a. Discussion algébrique, trigonométrique et géométrique des résultats.

II. — A quelle distance du centre d'une sphère de rayon R faut-il mener un plan pour que le plus petit segment sphérique déterminé par ce plan soit équivalent au cône ayant pour base la section, et pour sommet le centre de la sphère? Discussion algébrique et construction géométrique.

Académie de Toulouse.

I. — Établir la formule qui donne la somme des termes d'une progression géométrique. Que devient cette somme si le nombre des termes augmente indéfiniment?

II. — On considère une pyramide quadrangulaire SABCD, de sommet S et de base ABCD. On désigne par E le point de rencontre des côtés opposés ABCD de la base, et par F le point de rencontre des autres côtés AD, BC.

Soient A′B′C′D′ les points d'intersection respectifs des arêtes SA, SB, SC, SD, avec un plan parallèle au plan SEF.

1° Démontrer que le quadrilatère A′B′C′D′ est un parallélogramme;

2° Déterminer le point A′ de façon que ce parallélogramme soit équivalent à un carré donné.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — Un vase de verre dont le volume à la température 0° est 100 centimètres cubes est rempli de mercure à 0°. On demande :

1° Son volume à 40° (coefficient de dilatation du verre : 0,000025);

2° Le volume qu'aurait à 0° le mercure qui remplit le vase à 40° (coefficient de dilatation du mercure : 0,0002);

3° Le poids du mercure qui s'écoule dans l'expérience (densité du mercure : 13,6,

II. — *Choisir une des trois questions suivantes :* 1° Aire d'un cercle; 2° Me-

sure des volumes des parallélipipèdes et des prismes : insister sur l'enchaînement des propositions;

3° Résoudre le système d'équations

$$ax + by = c$$
$$3x + 4y = 5$$

d'où x et y sont les inconnues, a et b des nombres donnés, et discuter.

Académie de Grenoble.

I. — 1° Si l'on joint un point M à trois points quelconques P, Q, R d'une droite xy, on a la relation : (*)

$$\overline{MP}^2 \times \overline{QR} + \overline{MR}^2 \times \overline{PQ} - \overline{MQ}^2 \times \overline{PR} = \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \overline{PR}.$$

2° Application du théorème précédent au calcul des droites qui joignent un sommet A d'un triangle aux points D, D′ qui divisent le côté opposé au sommet A en moyenne et extrême raison.

Application numérique : $b = AB = 309,56$;
$c = BA = 198,63$;
$a = BC = 350,\ 8$.

Calculer AD et AD′.

II. — *a)* Etant donné un cercle O, de rayon R, et une corde CD à une distance $OA = a$ du centre, on prolonge le rayon OC d'une longueur $CE = 2R$ et l'on décrit le cercle O′ passant par C, D, E.

1° Trouver la distance OO′ des deux centres et le rayon du cercle O′.

2° Déterminer la distance a de façon que la tangente à O′, en E, soit une tangente commune aux deux cercles.

b) Résultante de deux forces parallèles et de même sens.

III. — 1° On donne les trois côtés a, b, c, d'un triangle ABC, rectangle en A, dont on mène la hauteur AC. On prend sur BA, de B vers A, sur CA, de C vers A, sur AD, de A vers D, trois longueurs égales :

$$BB' = CC' = AA' = x;$$

on joint les points A′, B′, C′, et on demande : 1° d'évaluer l'aire du triangle A′B′C′; 2° De déterminer la longueur x de façon que les trois points A′, B′, C′ soient en ligne droite.

2° *Questions à choisir : a)* Comment doit-on choisir un nombre x pour qu'il satisfasse à l'inégalité $\dfrac{5x^2 - 11x + 5}{x^2 - 2x + 3} > 1$?

b) Somme des termes d'une progression géométrique; limite de la somme quand la progression est décroissante et se prolonge indéfiniment.

c) Représentation graphique de la variation du quotient $\dfrac{5x^2 - 11x + 5}{x^2 - 2x + 3}$.

IV. — *Questions à choisir :* 1° Relation entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe d'une parabole et sa distance au sommet. Enoncer et démontrer les théorèmes relatifs à la sous-tangente et à la sous-normale qui conduisent à cette relation; 2° Tangentes à l'ellipse par un point donné dans son plan. Construction, discussion.

II. *Problème obligatoire.* — On décompose la suite naturelle des nombres impairs $1, 3, 5, 7, \ldots 2k + 1 \ldots$ en groupes consécutifs comprenant respectivement $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ termes. Démontrer que les sommes obtenues en additionnant les termes contenus dans chaque groupe forment la suite des cubes des nombres entiers consécutifs $1, 2, \ldots n \ldots$

(*) C'est le théorème de Stewart.

Académie de Poitiers.

I. — *Compositions communes à tous les candidats. — Questions à choisir :* 1° Trièdres supplémentaires. Définition. Propriétés; 2° Parallélépipède. Volume du parallélépipède rectangle, du parallélépipède droit et du prisme droit, du parallélépipède oblique et du prisme oblique; 3° Symétrie par rapport à un point et par rapport à un plan. Ce dernier mode de symétrie se ramène au premier. Symétrie par rapport à un point et par rapport à une droite. Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

2° Résoudre les équations :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = z, \qquad 2x + 2y + p = 0, \qquad z^4 + pz^2 + q = 0.$$

Conditions pour que les valeurs des trois inconnues soient réelles.

II. — Deux circonférences de rayons r et s se touchant, soit extérieurement, soit intérieurement, au point A par lequel on construit leur tangente commune, on demande de trouver, sur cette droite, un point où les autres tangentes menées à ces circonférences soient perpendiculaires l'une sur l'autre. Indiquer les valeurs du rapport $\frac{r}{s}$ pour lesquelles le problème est possible ou impossible.

III. — 1° Démontrer qu'une fraction dont les termes sont des nombres premiers entre eux n'est égale à aucune autre dont les termes seraient des nombres respectivement plus petits.

2° Faire tourner autour d'un axe donné dans le plan horizontal un segment rectiligne donné dans le même plan, jusqu'à ce qu'il soit vu sous un angle droit d'un point donné dans l'espace par ses deux projections.

IV. — 1° Ascension droite et déclinaison d'un astre.

2° On donne deux circonférences égales et tangentes. On leur mène une tangente commune. On demande de calculer le rayon d'une circonférence tangente aux deux premières et à leur tangente commune.

Académie de Besançon.

I. - *Questions à choisir* : 1° Volume du tétraèdre régulier dont l'arête a est donnée. 2° On coupe un tétraèdre régulier d'arête donnée a par un plan parallèle à une face et équidistant de cette face et du sommet opposé; calculer le volume du tronc de tétraèdre ainsi obtenu; 3° Trouver la position du centre de gravité du tétraèdre homogène en général et du tétraèdre régulier en particulier.

II. — *Question obligatoire :* On donne deux droites XX', YY' se coupant en A sous un angle α et, sur YY', un point B à la distance a de A; on mène la sécante BM. Cette sécante engendre en tournant autour de YY', un cône variable avec la distance AM $= x$ du point M à A. Etudier la variation de ce cône et calculer les dimensions de ses valeurs minima et maxima.

Académie de Caen.

I. — Soit D le point de contact de l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC avec le cercle inscrit dans ABC. — Montrer que ce triangle est équivalent au rectangle qui aurait pour côtés BD et DC. Conclure de là le maximum de l'aire des triangles rectangles qui ont une hypoténuse donnée.

II. — Montrer comment varie le trinôme :

$$3 + 5 \sin x - 2 \sin^2 x,$$

quand x croît de 0 à 2π.

I. — *Question obligatoire.* Démontrer que si un nombre entier est divisible par deux entiers premiers entre eux, il sera divisible par leur produit. Cela posé, montrer que si A désigne un nombre premier supérieur à 3, $A^2 - 1$ est toujours divisible par 24.

II. — *Questions à choisir :* 1° Inscription du décagone régulier dans un cercle. Calcul du côté ; 2° Démontrer que si deux trièdres ont leurs faces égales chacune à chacune, ils auront les dièdres respectivement égaux, et réciproquement ; 3° Construire l'intersection d'une droite et d'une parabole définie par son foyer et sa directrice. Conditions de possibilité.

Académie de Clermont.

I. — *Questions à choisir :* 1° Trièdres supplémentaires. En déduire les relations d'inégalité qui existent entre les angles dièdres d'un trièdre; 2° Volume d'un segment sphérique à bases parallèles; 3° Intersection d'une droite et d'une ellipse.

II. — *Problème.* — Résoudre les équations :

$$\sin x + \sin y = m \sin \alpha;$$
$$\cos x + \cos y = m \cos \alpha.$$

Discussion. — Cas où $m = \sqrt{3}$.

Académie de Lyon.

Compositions communes à tous les candidats. — I. *Questions à choisir :* 1° Démontrer que deux pyramides qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes ; 2° Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un des sommets a pour mesure la surface décrite par le côté opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur correspondante à ce côté; 3° Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre qui lui est extérieur a pour mesure la sixième partie du volume du cylindre qui aurait pour base un cercle dont le rayon serait la corde du segment, et pour hauteur la projection de cette corde sur le diamètre qui sert d'axe de rotation.

II. *Problème :* Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation (*)

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30.$$

Académie de Dijon.

I. — Démontrer que lorsque m est multiple de p, le polynôme $x^m - a^m$ est divisible par $x^p - a^p$. Donner le quotient. m n'étant pas multiple de p, former le quotient et le reste de la division.

II. — On donne un triangle. On demande de calculer : 1° Les côtés de triangle formé par les pieds des hauteurs du premier; 2° Ses angles.

III. — 1° On donne dans un plan un cercle O de rayon R et une droite D dont la distance au centre du cercle sera représentée par a. Déterminer sur le cercle un point M tel que M′ étant la projection le point M sur la droite D, la droite OI qui joint le centre du cercle au milieu de MM′ soit égale à une quantité donnée b. Discuter.

(*) On voit qu'il convient de prendre $2x^2 + 3x$ pour inconnue auxiliaire. *(G. L.).*

2° Dans une progression arithmétique la raison est égale à l'unité et le nombre n des termes est divisible par 3. Déterminer cette progression sachant que la somme des termes est 33 et que le terme de rang $n/3$ est égal à 4.

Académie de Bordeaux.

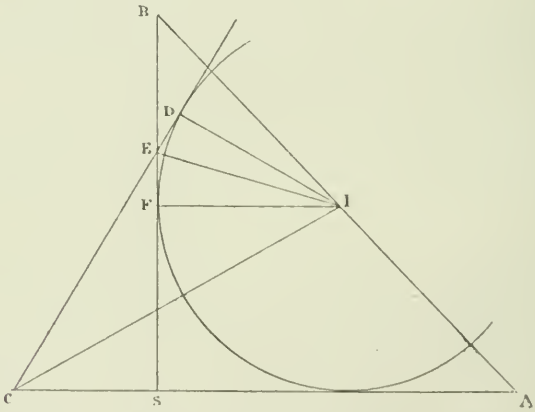
I. — *Questions à choisir* : (*a*) Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide. Leur réduction à une force, à un couple; (*b*) Condition d'équilibre d'un corps mobile autour d'un axe fixe; (*c*) Balance romaine.

I. — *Question obligatoire.* Soit AB un segment de droite rencontrant en C la droite DC. Comment varie l'angle AMB lorsque le point M se déplace sur la droite CD? — Discussion.

QUESTION 525

Solution par M. DE TIMES.

On donne un triangle rectangle isoscèle ASB *et une circonférence, tangente aux côtés* SA, SB, *qui a pour centre le milieu de l'hypoténuse* AB. *On mène à cette circonférence une tangente qui coupe* AS, *au point* C; BS *au point* E: *démontrer que*



le produit AC × BE *est constant, quand la tangente* CE *varie de position.* (Mannheim.)

En menant CI et EI on obtient les triangles AIC, BIE qui sont semblables. En effet, $\widehat{CAI} = \widehat{EBI} = 45°$.

$\widehat{ACI} = \widehat{ECI}$, $\widehat{DIF} = \widehat{CES}$, puisqu'ils ont le même supplément DEF. Or $\widehat{CES} = 90^\circ - 2\widehat{ACI} = \widehat{DIF}$

et $\widehat{BIE} = \widehat{BIF} - EIF = 45^\circ - \frac{1}{2}\widehat{DIF}$.

On a donc $$\widehat{BIE} = \frac{1}{2}\left[90^\circ - 90^\circ + 2\widehat{ACI}\right],$$

ou $$\widehat{BIE} = \widehat{ACI}.$$

Les triangles AIC, BIE étant semblables, on a

$$\frac{AC}{BI} = \frac{AI}{BE} \quad \text{ou} \quad AC.BE = \overline{AI}^2 = \text{constante}.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy; W.-J. Greenstreet, M. A.

M. Foucart, élève au lycée Michelet, nous a adressé deux solutions de cette question. Il observe qu'elle est un cas particulier du porisme 198.

QUESTION 517

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur au lycée de Marseille.

Étant données trois circonférences Δ, *de centres respectifs* A, B, C; *la circonférence qui leur est orthogonale admet pour axe radical avec la circonférence* ABC *la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé par les axes de similitude des circonférences* Δ. (Poulain)

La puissance du point M par rapport à la circonférence ABC est égale à

$$MA.MB.$$

Or, les quatre points A, B, S et S_1 formant un système harmonique, et M étant le milieu de SS_1, on a $MA.MB = MS^2$.

Cette puissance est donc égale à

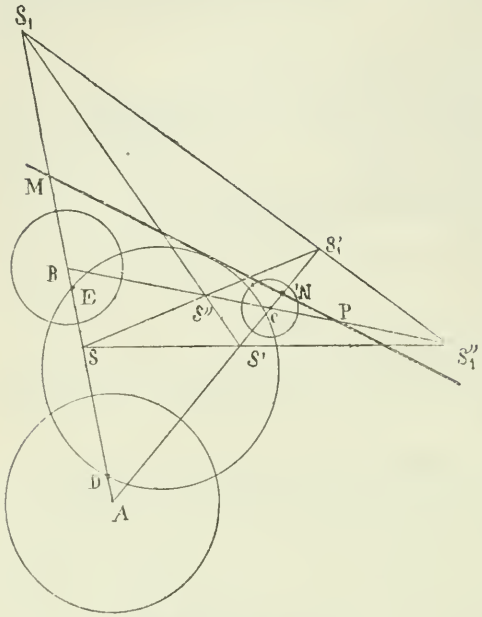
$$\overline{MS}^2.$$

Calculons MS, on trouve facilement, en désignant respectivement par R, R_1, R_2 les rayons des circonférences A, B et C,

$$SS_1 = AB.\frac{2RR_1}{R^2 - R_1^2};$$

d'où $$MS = AB.\frac{RR_1}{R^2 - R_1^2},$$

et la puissance de M par rapport à la circonférence ABC est égale à



$$\overline{AB}^2 . \frac{R^2 R_1^2}{(R^2 - R_1)^2}.$$

D'autre part, la puissance du point M par rapport à la circonférence orthogonale aux circonférences Δ est, en appelant D et E les points où elle coupe AB,

$$ME.MD = (MB + BE)(MB + BD),$$

et l'expression de cette puissance peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \overline{MB}^2 + MB(BE + BD) + BE.BD.$$

Nous allons calculer MB, (BE + BD) et BE.BD.

On a
$$MB = MS - BS.$$

Or, on a vu que
$$MS = AB . \frac{RR_1}{R^2 - R_1^2},$$

et l'on trouve facilement que
$$BS = AB . \frac{R_1}{R + R_1};$$

d'où
$$MB = AB . \frac{R_1^2}{R^2 - R_1^2}.$$

On a aussi
$$R^2 = AD.AE = (AB - BD)(AB - BE)$$

ou
$$R^2 = AB^2 - AB(BD + BE) + BD.BE.$$

Or,
$$BD.BE = R_1^2;$$

par suite
$$BD + BE = \frac{AB^2 + R_1^2 - R^2}{AB}.$$

En portant ces valeurs de MB, (BD + BE) et BD.BE, dans l'expression (1), on trouve, après quelques simplifications, pour expression de la puissance du point M,

$$\overline{AB}^2 . \frac{R^2 R_1^2}{(R^2 - R_1^2)^2}.$$

Le point M appartient donc à l'axe radical des deux circonférences considérées.

On démontrerait d'une façon analogue que les milieux N et P des diagonales $S'S'_1$ et $S''S''_1$ appartiennent à cet axe radical, lequel n'est autre que la droite joignant les milieux des diagonales du quadrilatère complet formé en joignant les centres de similitude des trois circonférences Δ.

C. Q. F. D.

Deuxième solution par A. Droz-Farny.

Représentons par α' et α'' les centres de similitude, direct et inverse, des circonférences B et C, par α la circonférence décrite sur $\alpha'\alpha''$ comme diamètre, enfin par T la circonférence orthogonale aux circonférences Δ. D'après un théorème bien connu, les circonférences B, C, α ont le même axe radical. Donc T coupe aussi α orthogonalement. Par conséquent, T est orthogonale aux trois circonférences α, β, γ.

ABC est aussi orthogonale aux circonférences α, β, γ. Car les points B, C, α', α'' étant harmoniques, toute circonférence passant par B et C coupera α orthogonalement.

Il résulte de là que T et ABC sont orthogonales à des circonférences α et β; elles admettent donc la ligne des centres $\alpha\beta\gamma$ comme axe radical.

Solution analytique par M. Poulain, à Angers.

Soient R_a, ... les rayons des trois cercles A, B, C; ω, leur centre radical, qui est le centre de leur cercle orthogonal. Rapportons les figures au triangle ABC. Il est facile d'écrire l'équation barycentrique du cercle ω, car les puissances de A, B, C sont R_a^2, ... L'équation est donc

(1) $$(\alpha + \beta + \gamma)\Sigma\alpha R_a^2 - \Sigma a^2\beta\gamma = 0.$$

Par suite, l'axe radical des cercles ω et ABC a pour équation

(1) $$\Sigma\alpha R_a^2 = 0.$$

Or, cette droite coupe BC au centre du cercle de simili-

tude des cercles B et C, car on sait que ce dernier point divise, comme la droite (2), BC dans le rapport de $-R_b^2$ à R_c^2. Il en est de même pour AB et CA. Donc...

On voit en même temps que cet axe radical (2) peut être défini autrement. Comme l'axe de similitude externe a pour équation

$$(3) \qquad \Sigma \alpha R_a = 0,$$

ces deux droites sont harmoniquement associées à deux points dont le premier est le second potentiel du second. Ce qui donne une nouvelle construction de (2).

Remarque. — Le théorème peut servir à résoudre le problème classique de *tracer les quatre couples de cercles tangents aux cercles* A, B, C; pourvu qu'on s'appuie sur cet autre énoncé : *les quatre couples de cercles tangents à trois cercles* A, B, C *ont pour axes radicaux avec le cercle orthogonal* ω *les quatre axes de similitude des cercles* A, B, C. *En particulier, l'axe externe correspond au couple du premier genre.* Cet énoncé donne seize points du cercle ω.

Pour établir cette proposition, considérons, par exemple, un cercle du premier genre. Je dis que S_1, centre de similitude externe de A et B, appartient à l'axe radical qu'il détermine avec ω. En effet, la corde des contacts du cercle tangent passe par S_1. Pour le cercle orthogonal, on sait que, s'il coupe en M le cercle A, il coupe B en deux points dont l'un, N, est antihomologue de M par rapport à S_1. Donc, MN passe aussi en S_1, et ce point a la même puissance pour les deux cercles : c'est le produit de deux rayons vecteurs antihomologues. On prouverait de même que S_1', S_1'' appartiennent à l'axe radical.

Cela posé, soit à tracer les cercles tangents du premier genre. On est ramené à tracer par deux points, réels ou imaginaires conjugés, un cercle tangent au seul cercle A. En effet, considerons trois cas : 1° Supposons que le cercle ω soit réel et coupe l'axe de similitude externe S_1S_1' en deux points réels. Le cercle tangent cherché, passant par ces points, la méthode classique le construit facilement : On cherche la tangente commune en la regardant comme un axe radical;

2° Si le cercle ω est réel, mais coupe S_1S_1' en des points imaginaires, la méthode reste identique; 3° Si le cercle ω est imaginaire, la seule différence, c'est que l'axe radical qu'il détermine avec le cercle A ne se trouve plus tracé. Mais on peut le construire, car il est perpendiculaire à la ligne des centres $A\omega$, et, en recourant au cercle auxiliaire ABC, on voit que l'axe passe par l'intersection de la droite (2) et de la corde commune aux cercles A et ABC.

QUESTION 518

Solution par M. A. Droz-Farny.

Soient A, B, C, D, F, G *les six sommets d'un quadrilatère complet dont les quatre premiers* A, B, C, D, *sont sur une même circonférence. Soit* E *le point de concours des diagonales* AD *et* BC.

1° *Les circonferences circonscrites aux triangles* ABE, CDE, ADG *et* BCG *coupent la droite* GE *au même point* O_2. *De même, les circonférences* ABF, CDF, ACG *et* BDG *coupent* GF *au même point* O_1, *et les circonférences* ACE, BDE, ADF *et* BCF *coupent* FE *au même point* O_3.

2° *La droite* GO_2 *est bissectrice de l'angle* O_2C.

3° *Les droites* EO_1, FO_2, GO_3 *sont les hauteurs du triangle* EFG. *Leur point de concours est le centre de la circonférence donnée.*

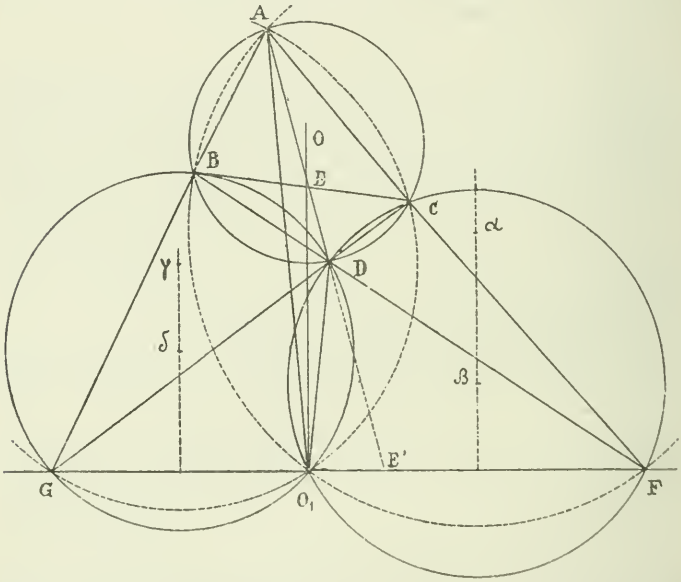
4° *Les centres des quatre circonférences décrites au n° 1 et qui passent en* O_2 *sont sur une même circonférence qui passe aussi en* O_2. *Même chose, pour les deux autres groupes de quatre circonférences.* (Lucien Lévy.)

1° La circonférence ACG coupe FG au point O_1, donc angle $AO_1F = 180° - AO_1G = 180° - ACG = ABF$. Donc O_1 appartient aussi à la circonférence ABF. Il résulte $GB.GA = GD.GC = GO_1.GF$ et $FC.FA = FD.FB = FO_1.FG$. Les deux quadrilatères $CDFO_1$ et $BDGO_1$ sont aussi inscriptibles. Démonstration analogue pour les deux autres quadruples de circonférences.

(*) Les points O_2, O_3 ne sont pas marqués et les circonférences correspondantes ne sont pas tracées pour laisser plus de netteté à la figure.

2° et 3° Comme on le sait, le triangle EFG est conjugué par rapport à la circonférence. Si donc AD rencontre FG en E′, les quatre points A, D, E, E′ sont harmoniques. Or, angle $DO_1F = ACG$ et angle $AO_1G = ACG$; FG est donc bissectrice extérieure du triangle DO_1A et comme le faisceau $O_1(E'DEA)$ est harmonique, O_1E est bissectrice de l'angle DO_1A; O_1E est donc aussi perpendiculaire sur FG et, comme E est le pôle de FG, cette droite O_1E passe par le centre O de la circonférence.

4° Les propriétés énoncées sous les n°s 1 et 4 sont des cas particuliers du théorème général suivant: Quatre droites



quelconques déterminent quatre triangles. Les circonférences circonscrites à ces quatre triangles passent par un même point: ce point et les centres de ces circonférences sont cinq points d'une même circonférence. La démonstration que nous donnerons de cette dernière partie est générale:

Soient α, β, γ, δ les centres des circonférences ABF, CDF, ACG, BDG. On a $\alpha\delta$ est perpendiculaire sur BO_1,

$\gamma\delta$ — — O_1G,

donc angle $\alpha\delta\gamma = BO_1G$;

$\alpha\beta$ est perpendiculaire sur FO_1,

$\beta\gamma$ — — CO_1,

donc angle $\alpha\beta\gamma = CO_1F$;

mais $BO_1G = CO_1F$,

donc $\alpha\beta\gamma = \alpha\delta\gamma$;

les points α, β, γ, δ appartiennent donc à une même circonférence.

$$\text{angle } \beta O_1F = 90^\circ - O_1CF,$$
$$\text{angle } \alpha O_1F = 90^\circ - FAO_1,$$
$$\alpha O_1\beta = FAO_1 - O_1CF = CO_1A = \alpha\gamma\beta;$$

O_1 appartient à la circonférence $\alpha\beta\gamma\delta$.

Remarque. — Réprésentons par t_1 et t_2 les tangentes menées de F et G à la circonférence. On a

$$FO_1.FG = FC.FA = t_1^2,$$
$$GO_1,GF = GB.GA = t_2^2;$$

d'où $\overline{FG}^2 = t_1^2 + t_2^2$.

Ainsi, la somme des puissances des extrémités de la diago- par rapport à la circonférence est égale au carré de FG.

On en déduit aisément que la circonférence, décrite sur FG comme diamètre, est orthogonale à la circonférence donnée.

Nota. — Autre solution par M. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

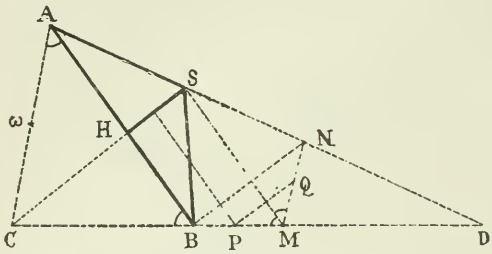
QUESTION 530

Solution par A. Droz-Farny.

On donne un triangle isoscèle ASB *et sa hauteur* SH. *Du sommet* B, *on mène une droite arbitraire : elle rencontre* SH *au point* C, SA *au point* D, *et elle rencontre, au point* A, *la parallèle à* AB *menée par le milieu de* SH. *On prend le point* Q *symétrique de* P, *par rapport à la parallèle à* AB *menée du point* S. *Démontrer que la droite* PQ *passe par le milieu du segment* AC. (Mannheim.)

Soient : M le point d'intersection de la transversale BP avec la parallèle à AB, menée du sommet S; et N le symétrique de B, par rapport à cette parallèle. N se trouve évidemment

sur SA à une distance SN = SA. Puisque BN et PQ sont parallèles et que $PQ = SH = \frac{BN}{2}$, les trois points M, Q, N sont en ligne droite et Q est le point milieu de MN.



On a $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = \widehat{BMS} = \widehat{SMN}$; les droites MN, AC sont donc parallèles; ainsi, QD coupe AC en son point milieu ω.

Nota.— M. E. Foucart, élève du lycée Michelet, nous a adressé une solution analytique.

QUESTIONS PROPOSÉES

564. — On considère une parabole P. En un point M, pris sur P, on trace la normale qui rencontre en A l'axe de P. Soit Δ la circonférence de centre A, de rayon AM. Par le foyer F, on mène une tangente FB à Δ, la parallèle à l'axe, passant par B, rencontre P en C. Démontrer que BC est de grandeur constante. *(G. L.)*

565. — Quatre quadrilatères, directement semblables à un quadrilatère inconnu, ont été placés sur un plan de telle manière que deux systèmes de sommets homologues soient situés respectivement sur deux droites inconnues.

On connaît les positions de sept des huit autres sommets, et l'on demande de construire le dernier sommet. *(G. Tarry.)*

566. — Étant données deux circonférences et un point situé sur la ligne des centres, mener par ce point une sécante telle que la somme ou la différence des cordes interceptées soit égale à une longueur donnée. *(G. Tarry.)*

ERRATUM. — Page 118, première ligne : au lieu de *n* lisez *sin*.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 26772-12-93.

SUR LES TRIANGLES

DONT LES CÔTÉS SONT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Par M. **Droz-Farny.**

Les triangles, dont les côtés sont en progression arithmétique, jouissent de nombreuses propriétés assez remarquables. Nous nous proposons ici de donner de simples démonstrations géométriques pour quelques-unes d'entre elles.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que le côté $BC = a$ est le côté moyen. Nous aurons donc

$$AB + AC = 2BC.$$

Traçons la bissectrice AII′ qui rencontre en D le côté moyen BC. On a

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{a} = 2.$$

D'ailleurs, I étant le centre du cercle inscrit est situé sur la bissectrice de l'angle B; on a

$$\frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

1° Le rayon du cercle inscrit est le tiers de la hauteur abaissée du sommet A *sur le côté moyen.*

2° Le centre du cercle inscrit, le centre de gravité du triangle, le point de Nagel et le centre de gravité du triangle du périmètre sont sur une ligne droite, parallèle au côté moyen.

Les points I et I′, ce dernier étant le centre du cercle exinscrit dans l'angle A, sont conjugués harmoniques sur AD; on a donc :

$$I'D : I'A = 1 : 2.$$

3° La droite AI′ *est divisée par le côté moyen en deux parties égales.*

4° Le rayon r′ *du cercle exinscrit dans l'angle* A *est égal à la hauteur abaissée de* A *sur* BC.

Remarque. — Ces différents théorèmes se déduisent d'ailleurs aisément des relations :

$$S = \frac{a}{2} h$$

$$= pr = (p - a)r'.$$

Comme

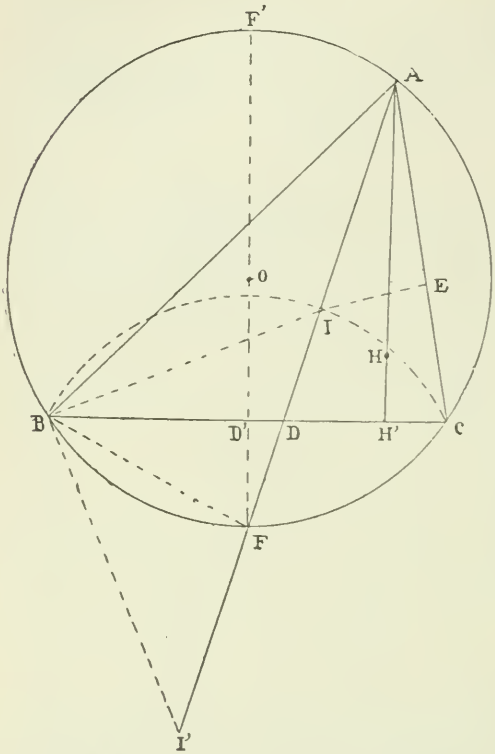
$$p = \frac{3a}{2},$$

on obtient

$$\frac{a}{2} h = \frac{3ar}{2} = \frac{a}{2} r',$$

d'où

$$h = 3r = r'.$$



Construisons la circonférence circonscrite au triangle ABC. Le diamètre perpendiculaire à BC coupe BC en D' et le petit segment BC en F; abaissons, de I, la perpendiculaire IE sur AC, et soit AHH' la hauteur correspondant à BC.

On a $$AE = p - a = \frac{a}{2} = BD'$$

et comme l'angle IAE = FBD les triangles rectangles IEA et FD'B sont égaux.

Il en résulte $$D'F = IE = r,$$

donc $$OD' = \frac{AH}{2} = R - r.$$

Ainsi :

5° La perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit sur le côté moyen est égale à la différence entre les rayons des circonférences circonscrite et inscrite.

D'ailleurs, on sait que, dans tout triangle, on a $D'F = \frac{r' - r}{2}$.

On a donc $$\frac{r' - r}{2} = r.$$

On retrouve la relation, déjà obtenue,

$$r' = 3r.$$

D'après le théorème de Carnot, on sait que la somme des trois perpendiculaires abaissées, de O, sur les côtés, est égale à $R + r$.

On en déduit :

6° La somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés extrêmes da la progression est égale au diamètre du cercle inscrit.

De l'égalité des triangles rectangles précédents, résulte encore $BF = FI = IA$; donc :

7° Le segment de la bissectrice de l'angle AB *compris dans la circonférence circonscrite, est divisé par le centre* I *du cercle inscrit en parties égales; autrement dit, le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur la bissectrice* AF *est le centre du cercle inscrit.*

On sait que II' est divisé en parties égales par la circonférence circonscrite; on peut donc encore énoncer le théorème précédent en disant :

La droite AI' *est divisée par le centre du cercle inscrit, et par la circonférence circonscrite en trois parties égales.*

On a $$\overline{BF}^2 = \overline{AI}^2 = FD.FQ' = 2Rr.$$

Or, dans le triangle rectangle OIA, on a $OA = R$, et l'on retrouve la relation d'Euler

$$OI = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Les deux droites AF et OH comprises entre les parallèles OD' et AH ont leurs points milieux sur une perpendiculaire à BC; par conséquent :

8° Le centre du cercle inscrit et le centre du cercle d'Euler sont sur une droite perpendiculaire au côté moyen.

Si l'on observe que cette droite contient aussi le point de

contact de ces circonférences, on en déduit le théorème indiqué par M. Foucart, qui constitue la question 553 :

9° Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points est parallèle au côté moyen.

Citons, pour finir, les relations trigonométriques, faciles à démontrer

$$(1) \qquad 2 \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B - C}{2},$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3},$$

$$(3) \qquad \frac{3a}{2} = b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2},$$

$$(4) \qquad \frac{a^2}{4} = (2R - r)r.$$

PIÈGE CINÉMATIQUE

Par M. **G. Tarry**.

Dans l'espace, tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu en exécutant un simple mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Soient A, B, C et A′, B′, C′ les points correspondants de deux figures égales, placées d'une manière quelconque dans l'espace.

On sait qu'il suffit de démontrer qu'il existe un point O, tel que les deux tétraèdres OABC et OA′B′C′ soient égaux.

Pour les points milieux des droites AA′, BB′, CC′, qui

(*) En nous faisant cet envoi, M. G. Tarry y ajoute la question suivante : *Deux triangles égaux* ABC *et* A′B′C′ *sont placés d'une manière quelconque dans l'espace.*

S'il existe un point O *tel que les deux tétraèdres* OABC *et* OA′B′C′ *soient égaux, les plans élevés perpendiculairement aux milieux des droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles égaux passent par une même droite, qui rencontre la droite d'intersection des plans des deux triangles.*

Nous insérerons volontiers les solutions qu'on nous adressera. *(G. L.)*

joignent les sommets correspondants des deux triangles égaux ABC et A'B'C', menons les plans respectivement perpendiculaires à ces droites.

Désignons par O le point de rencontre de ces plans. On a

$$OA = OA', \quad OB = OB', \quad OC = OC'.$$

Les deux tétraèdres OABC et OA'B'C', qui ont leurs faces égales chacune à chacune, sont donc égaux.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE-SCIENCES
EN 1894

Solution par M. Monsallut, professeur au lycée de Limoges.

Étant donnés deux droites X, Y *qui se coupent en* O, *un point* A *sur* X *et un point* B *sur* Y :

1° Construire l'arc de parabole tangent à ces droites aux points A, B *et compris entre ces points* (*);

2° Donner la condition géométrique pour que le sommet de la courbe soit sur l'arc AB;

3° Le point C *étant le milieu de la corde* AB, *on représente par* c *la longueur* OC, *et par* u, v *les angles* AOC, BOC; *calculer en fonction de ces données le paramètre de la parabole, et étudier la variation de cette quantité quand le point* A *restant fixe, le point* B *parcourt la droite illimitée* Y. *Examiner les cas limites;*

4° Construire a priori *(sans faire usage des éléments de la courbe) une tangente à l'arc considéré, parallèle à une direction donnée; conditions de possibilité.*

1° et **4°**. — Sur la droite AB, on marque un point quelconque I, par lequel on mène les parallèles IP à OB, IQ à OA; on a la proportion $\frac{PA}{PO} = \frac{QO}{QB}$; par suite, la diagonale PQ du

---

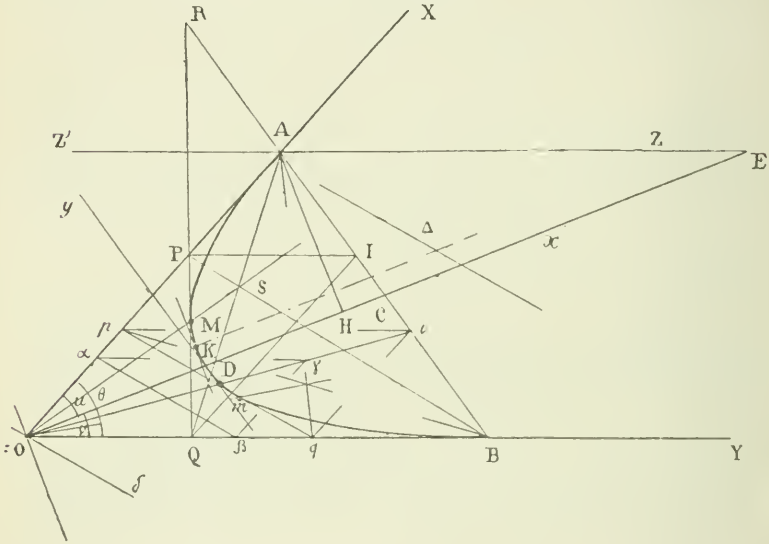
(*) Ce problème est posé et résolu dans l'ouvrage de M. de Longchamps (*Géométrie de la règle et de l'équerre*, p. 59).

La solution du § 1er à laquelle on rattache immédiatement celle des §§ 2, 4, ne diffère pas essentiellement de celle qui a été donnée par M. de Longchamps *(loc. cit.)*. Nous l'avons, seulement, légèrement modifiée en suivant les indications qu'il nous a communiquées.

parallélogramme OPIQ est tangente à la parabole qui touche en A et B les droites X et Y. Le point de contact M de cette tangente étant le conjugué harmonique, relativement au segment PQ, du point de rencontre R des droites PQ, AB s'obtient en coupant la droite PQ par la droite joignant le point O au point S d'intersection des droites AQ, BP.

On obtient tous les points de l'arc de parabole demandé, en faisant décrire au point I le segment de droite AB.

Pour mener à la parabole une tangente parallèle à une direction donnée Δ, on trace une parallèle quelconque à cette direction, coupant OA en α, OB en β; on construit le parallé-



logramme Oαγβ, puis on mène la droite Oγ, qui coupe AB au point *i*, auquel on applique les constructions précédentes pour obtenir la tangente cherchée *pq* et le point de contact *m*.

Pour que le point *m* appartienne à l'arc AB, il faut et il suffit que le point *i* soit situé sur le segment de droite AB, et, par suite, il faut et il suffit que la parallèle Oδ à Δ ne coupe pas ce segment, attendu que le faisceau O(δB*i*A) est harmonique.

2° La tangente au sommet de la courbe étant perpendiculaire à la médiane OC du triangle AOB, le problème de la construction de cette tangente et du sommet K est un cas particulier de celui que l'on vient de résoudre pour une direction Δ quelconque.

Pour que le point K soit situé sur l'arc de parabole AB, il faut et il suffit que la perpendiculaire à OC menée par le point O soit extérieure à l'angle des demi-droites OA, OB.

3° Le diamètre OC de la parabole la coupe au point D, milieu de OC, et la tangente en D est parallèle à AC; la courbe étant rapportée à ce diamètre comme axe des x et à cette tangente comme axe des y, a pour équation :

$$y^2 = 2\,\frac{p}{\sin^2(\mathrm{OC},\,\mathrm{AB})}\,x,$$

p désignant le paramètre. On a, par suite:

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\,\frac{p}{\sin^2(\mathrm{OC},\,\mathrm{AB})}\cdot\mathrm{DC} = \frac{p}{\sin^2(\mathrm{OC},\,\mathrm{AB})}\cdot c;$$

d'où
$$p = \frac{\sin^2(\mathrm{OB},\,\mathrm{AB}).\overline{\mathrm{AC}}^2}{c} = \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{c},$$

AH étant la hauteur du triangle OAE (CE = CO), dont on connaît la base OE, égale à 2c, et les deux angles adjacents u, v. Cette hauteur a pour expression $\frac{\sin u \sin v}{\sin\theta}\cdot 2c$, ($\theta$ désignant l'angle des droites X, Y), et, conséquemment, on a, pour l'expression demandée de p :

$$p = \frac{4\sin^2 u \sin^2 v}{\sin^2\theta}\cdot c.$$

Si l'on désigne respectivement par a et b les longueurs OA et OB, le triangle OAE donne:

$$\overline{\mathrm{AH}}^2 = \frac{\sin^2\theta.\overline{\mathrm{OA}}^2.\overline{\mathrm{AE}}^2}{\overline{\mathrm{OE}}^2} = \frac{\sin^2\theta.a^2b^2}{4c^2},$$

et, de plus,

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\cos\theta.ab};$$

on a, par suite, cette autre expression du paramètre :

$$p = \frac{2\sin^2\theta.a^2b^2}{(a^2 + b^2 + 2\cos\theta.ab)^{\frac{3}{2}}},$$

laquelle convient à tous les cas lorsque, le point A restant fixe,

le point B parcourt la droite Y, si l'on convient de regarder le nombre b comme positif, lorsque B est sur la demi-droite inclinée sur X de l'angle aigu θ; comme négatif, lorsque B se trouve sur le prolongement de cette demi-droite.

La fonction

$$z = \frac{b^2}{(a^2 + b^2 + 2.ab \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

est nulle pour $b = 0$; on peut l'écrire :

$$z = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1 + 2\cos\theta.\frac{a}{b}\right)\cdot\sqrt{a^2 + b^2 + 2\cos\theta.ab}},$$

ou

$$\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1 + 2\cos\theta.\frac{a}{b}\right).2c},$$

sous cette forme, on voit qu'elle est nulle également pour $b = \pm\infty$.

La dérivée z' de z a pour expression :

$$z' = \frac{b(-b^2 + \cos\theta.ab + 2a^2)}{(a^2 + b^2 + 2\cos\theta.ab)^{\frac{5}{2}}};$$

le dénominateur ne s'annule pas; le numérateur et, par suite, z' est nul pour :

1° $b = 0$;

2° $-b^2 + \cos\theta.ab + 2a^2 = 0$,

d'où

$$\left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\cos\theta.\mp\sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2}.a;$$

3° $b = \pm\infty$, car on peut écrire :

$$z' = \frac{-1 - \cos\theta\frac{a}{b} + 2\frac{a^2}{b^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}1 + + 2.\frac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}(a^2 + b^2 + 2.ab\cos\theta)},$$

ou

$$\frac{-1 + \cos\theta.\frac{a}{b} + 2\frac{a^2}{b^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1 + 2\cos\theta.\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 4c^2},$$

et, sous cette forme, on voit qu'on a bien $z' = 0$, pour $b = \mp\infty$.

Aux valeurs b_1 et b_2 de b répondent des valeurs p_1 et p_2 de p, faciles à calculer.

Il résulte de ce qui précède que lorsque b croît de $-\infty$ à b_1, puis de b_1 à o; ensuite de o à b_2, et enfin de b_2 à $+\infty$, la dérivée z' de z, nulle au commencement et à la fin de chacun de ces intervalles, est positive pour le premier et le troisième, et négative pour les deux autres; conséquemment, le paramètre p croît du minimum zéro au maximum p_1, puis décroît de ce maximum au minimum zéro; ensuite croît de zéro au maximum p_2, et enfin décroît de p_2 au minimum zéro.

Dans chacun des cas limites $b = -\infty$, $b = o$, $b = +\infty$, la parabole se réduit à une demi-droite double : à la demi-droite $AZ'\infty$ parallèle à Y pour $b = -\infty$, à la demi-droite $OA\infty$ pour $b = o$, à la demi-droite $AZ\infty$, prolongement de AZ', lorsque $b = +\infty$.

CORRESPONDANCE (*)

... Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point; cette propriété peut s'énoncer ainsi : *Sur un plan, on donne un triangle et une circonférence de cercle; les droites menées des sommets du triangle parallèlement aux droites conjuguées, par rapport au cercle, des côtés respectivement opposés à ces sommets, se coupent en un même point.*

Au moyen d'une projection conique, ce théorème conduit au suivant :

Sur un plan, on donne un triangle, une conique et une droite H. *On joint par une droite l'un des sommets du triangle au point de rencontre de* H *et de la polaire par rapport à la conique, du point où* H *rencontre le côté du triangle opposé au sommet considéré; on obtient ainsi une droite pour chacun des sommets du triangle : ces droites se coupent en un même point.*

On peut supposer H à l'infini et réduire la conique à deux droites, on a alors cette propriété :

Sur un plan, on donne un triangle et deux droites. De chacun des sommets du triangle on mène une parallèle à la direction conjuguée, par rapport aux deux droites, des côtés du triangle respec-

(*) Anonyme.

tivement opposés à ces sommets : les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point.

Prenant le point de rencontre des deux droites, qui entrent dans cet énoncé, pour centre d'un cercle par rapport auquel on transforme par polaires réciproques le théorème précédent on trouve un théorème relatif encore à un triangle et deux droites, mais où trois points sont en ligne droite. Et, si dans le résultat ainsi obtenu, on suppose qu'une des droites données est rejetée à l'infini, le théorème, auquel on arrive, n'est autre que celui démontré au bas de la page 162 du *J. M. E.*

La marche que nous venons de suivre fait connaître quelques propriétés et donne lieu pour les élèves à des exercices de transformation, c'est pourquoi je l'indique...

BIBLIOGRAPHIE

Geometrical Conics (part. I *Parabola*; part II, *the Central Conic*), par le Rev. J. Milne, *M. A.*; et R .F. Davis, *M. A.* — London, Macmillan and Co, 1894.

Le livre que nous signalons à l'attention de nos collègues est un traité élémentaire de la Géométrie des Coniques. Les propositions y sont démontrées par la voie purement géométrique et il n'y a pas de meilleure préparation, pour les candidats aux écoles, pour ceux notamment qui se proposent à entrer en Mathématiques spéciales, que la lecture de l'ouvrage de MM. Milne et Davis. Il leur sera, s'ils peuvent lire l'anglais, un guide précieux. Les auteurs prennent pour définir les coniques centrales trois définitions : bien entendu, ils commencent par établir leur concordance. Pour la parabole, ils adoptent comme définition unique, la propriété de l'ordonnée et de l'abscisse : *le carré de l'ordonnée est à l'abscisse dans un rapport constant**. Cette définition n'est pas généralement adoptée en France. Mais, quelle que soit celle qui sert de point de départ, comme l'équation $y^2 - 4ax = 0$ est la conséquence immédiate de cette définition, il n'y a aucun inconvénient à prendre celle que proposent MM. Milne et Davis. Il suffirait de modifier les premières lignes de leur ouvrage, ouvrage très clairement écrit, et que nous avons lu avec un réel intérêt.

(G. L.)

(*) Ce rapport constant est appelé, comme on sait, *le paramètre* de la parabole. Les Anglais le désignent par $4a$. Cette notation est préférable à celle qui est adoptée en France; la distance du sommet au foyer que nous sommes obligés, dans notre notation, de représenter par la fraction $\frac{p}{2}$ et qui se présente dans de nombreux calculs est alors, avec la notation anglaise, égale à a.

BACCALAURÉAT

Académie de Paris.

(Session d'avril 1894)

I. — 1° *Problème obligatoire.* — Un tronc de cône ABCD est circonscrit à une sphère donnée O de rayon R. Déterminer ce tronc de cône de telle façon que sa surface totale soit égale à $2\pi l^2$, l étant une longueur donnée.

2°. *Trois questions à choisir :*

Démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée.

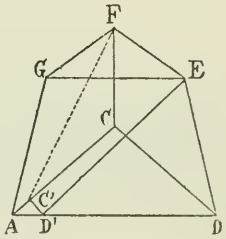
Démontrer qu'un nombre entier quelconque est décomposable d'une manière et d'une seule en facteurs premiers.

Théorie de l'extraction de la racine carrée des nombres entiers faite sur l'exemple 3549.

II. — Etant donné un tronc de pyramide triangulaire ACDEFG à bases parallèles B et b, mener par l'arête EF de la petite base un plan EFC'D' coupant le tronc en deux parties équivalentes.

On pourra prendre pour inconnue le rapport

$$\frac{AD'}{AD} = x.$$



(14) Trouver le centre de gravité du périmètre d'un trapèze ABCD, constitué par un demi-hexagone régulier AB, BC, CD et le diamètre AD du cercle circonscrit. Le périmètre est supposé homogène.

Académie d'Aix.

(Novembre 1893).

I. — 1° On demande de partager en deux parties équivalentes un champ qui a la forme d'un quadrilatère. Le problème a une infinité de solutions. On demande d'en donner au moins une.

2° On demande de déterminer a, b, c, de manière que le trinôme $ax^2 + bx + c$ jouisse des propriétés suivantes :

que pour $x = 1$ le trinôme soit égal à 2 :
$x = 2$ — $= 1$;
$x = 3$ — $= 2$.

II. — 1° Calculer tg $2x$ sachant que l'on a :

$$4 \sin x + 7 \cos x = 8.$$

2° On donne un triangle ABC dont les côtés sont respectivement donnés par les égalités suivantes :

AB = 5 mètres;
BC = 6 mètres;
CA = 7 mètres.

Sur le côté BC on prend un point E tel que BE = 2 mètres. — On demande de calculer la distance AE.

Académie d'Alger.

1° Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône, connaissant sa hauteur h, son volume $\frac{\pi h m^2}{3}$ et la somme a, des rayons inconnus.

2° La déclinaison du soleil étant australe et ayant une valeur de 2°17′, on demande quels sont les points du globe terrestre pour lesquels le soleil ne se couche pas.

Académie de Besançon.

I. — 1° Tout nombre entier qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.

2° Quelles sont les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x - 1} > 1 ?$$

II. — 1° L'expression $\frac{x - 1}{2x - 1}$ admet-elle des maximums où des minimums quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$?

2° Un point pesant est lancé à partir du point A sur une ligne droite AC inclinée sur l'horizontale d'un angle α. Ce point a donc au départ une vitesse initiale V_0 dirigée suivant la droite AC. Déterminer le point C où s'arrêtera son mouvement ascendant. Quel est le lieu géométrique de ces points C quand on laisse V_0 constant en faisant varier l'angle α?

Académie de Bordeaux.

I. — 1° Étant donné $\sin a$, trouver $\sin \frac{a}{2}$.

2° Étant donné $\operatorname{tg} a$, trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

3° Étant donné un prisme dont la section droite est un triangle équilatéral de côté a, on propose de mener, par un point M de l'une des arêtes, un plan qui coupe le prisme suivant un triangle AMB, rectangle en M et dont l'hypoténuse ait une longueur donnée l. — Discussion. Minimum de l'interprétation géométrique.

II. — 1° Calculer dans un triangle, dont tous les éléments sont donnés, la distance du cercle inscrit aux centres des cercles circonscrits. Quelle doit être la nature du triangle pour que ces trois distances soient égales?

2° Étant donnés trois points ABC, fixes, on joint un point variable M du plan ABC à ces trois points. On suppose que les segments MA, MB, MC, représentent trois forces en grandeur et en direction : 1° Démontrer que lorsque M se déplace sur AM, l'intensité de la résultante des trois forces MA, MB, MC décrit une droite parallèle à AM; 2° Étudier les variations de l'intensité de cette résultante.

Académie de Caen.

I. — En désignant par α un angle de triangle, trouver entre quelles limites doit varier cet angle pour que l'équation du second degré

$$16x^2 - 24x \sin\alpha + 7 \sin^2\alpha - 3 \sin\alpha + 2 = 0,$$

ne cesse d'avoir ses racines réelles.

II. — Calculer le $m^{\text{ième}}$ terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2 et la raison 4. Faire voir que le produit des m termes de cette progression est égal au produit de m entiers consécutifs croissants dont le premier est $m + 1$ (on vérifiera l'exactitude de cette proposition dans le cas où m est égal à 1, et on prouvera que, si elle est vraie pour une valeur quelconque de m, elle l'est encore pour la valeur suivante).

I. — Déterminer les longueurs des médianes d'un triangle connaissant les trois côtés du triangle. Cela posé, trouver le lieu géométrique des points d'un plan tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés dans le plan ait une valeur constante donnée.

II. — Trouver, sans l'emploi des tables, toutes les valeurs de l'arc x qui satisfont à l'équation :

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x.$$

Académie de Clermont.

I. — Un trapèze isoscèle ABCD est circonscrit à un cercle de rayon R. Les diagonales BD, AC sont respectivement perpendiculaires aux côtés BC, AD. On demande de calculer : 1° les diagonales et les côtés de ce trapèze; 2° le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère AEBF formé par les côtés et les diagonales du trapèze; 3° les signes trigonométriques des angles du trapèze et des angles formés par les diagonales et les côtés.

II. — 1° Calculer $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2° On donne un triangle trirectangle $Oxyz$; dans le plan Oxy un carré OABC dont le côté est a, Sur Oz un point R tel que $OR = d$. On demande de mener, par A, dans le plan xOy, une sécante coupant Ox en l et y en k et telle que l'angle PRQ vaille 60°.

III. — 1° Surface d'une zone sphérique.

2° Entre quelles limites varie la fraction

$$\frac{3x^2 - 5x - 8}{x^2 - x - 4}.$$

Académie de Dijon.

I. — On donne deux circonférences extérieures l'une à l'autre. Soient d la distance des centres, r et r' les rayons. On demande de calculer l'angle que font les deux tangentes communes, l'une intérieure, l'autre extérieure à ces deux circonférences.

II. — 1° Démontrer que quand un nombre divise un produit de deux facteurs et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

2° Transformation d'une fraction périodique mixte en fraction ordinaire.

3° On demande d'exprimer la bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle en fonction des deux côtés issus du sommet de cet angle et de cet angle lui-même. La bissectrice sera limitée au sommet de l'angle et au côté opposé.

III. — Trouver le minimum de l'expression

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + (c - x)^2}$$

a et c étant des quantité données et x la variable. Valeur de x pour laquelle a lieu ce minimum.

IV. — On donne une circonférence de rayon r et un point A extérieur. On joint le point A au centre de la circonférence. Soient B et C les points de rencontre de OA avec la circonférence. On mène ensuite par A, une sécante ADE faisant l'angle α avec OA et coupant la circonférence en D et E. On désignera la distance OA par a. On demande d'évaluer en fonction de l'angle α, des quantités a et r, la surface du quadrilatère BDEC.

Académie de Grenoble.

I. — *Choisir entre les trois questions suivantes :*

(*a*). Résoudre et discuter l'équation

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

(*b*). Connaissant tg a, trouver tg $\frac{a}{2}$. — Discuter.

(*c*). Résolution trigonométrique de l'équation du second degré.

Problème. — On donne, dans un triangle, un côté a, la hauteur correspondante h et le périmètre $2a$. On demande de calculer les deux autres côtés. Que faut-il pour qu'il existe un triangle répondant à la question?

II. — 1° Angle de deux plans donnés par leurs traces sur les plans de projection, l'un des deux plans étant perpendiculaire sur la ligne de terre.

2° Sur l'un des côtés BC d'un triangle équilatéral ABC, déterminer un point M tel que si l'on abaisse de ce point des perpendiculaires MP, MQ sur les deux autres côtés AB, AC et qu'on joigne PQ par une droite, l'aire du quadrilatère BPQB soit dans un rapport donné m avec celle du triangle.

Académie de Lille.

Questions à choisir : (*a*). Plus grand commum diviseur de deux nombres. Sa recherche par la méthode des divisions successives.

(*b*). Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Conditions de possibilité. Fractions décimales périodiques.

(*c*). Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité. Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier et fractionnaire à une approximation donnée.

Problème. — On donne un cercle O de rayon R, un diamètre AB de ce cercle et une corde NM qui rencontre AB en un point P *situé à l'intérieur du cercle.*

On pose : $OP = a$ angle $OPM = \varphi$.

Cela posé, on demande : 1° D'évaluer en fonction de R, a, φ, l'aire du quadrilatère AMBN ; 2° D'étudier la variation de cette aire, lorsque R

et a restant les mêmes, l'angle φ varie de O à π; 3° en particulier, on indiquera pour quelles valeurs de φ cette aire est maximum et on construira géométriquement la corde MN correspondante au maximum en supposant $a\sqrt{2} > R$.

Académie de Lyon.

I. — 1° Distance d'un point à un plan donné par ses traces.

2° Calculer la valeur de x qui rend maximum l'expression $y = a \cos x + b \sin x$; valeur de ce maximum. — Application

$$a = -0.86735, \quad b = +1.42087.$$

II. — Exposer la suite des observations et des calculs à l'aide desquels on peut arriver: 1° à reconnaître la nature de l'orbite apparente décrite par le soleil autour de la terre; 2° à établir en particulier la loi des aires; 3° à déterminer la direction du grand axe dans l'écliptique ainsi que l'excentricité de l'orbite.

Questions à choisir (*a*). Démontrer que le volume engendré par un segment circulaire BMD tournant autour d'un diamètre AH qui ne rencontre pas la corde BD, est égal à la moitié du volume d'un cône dont la base a pour rayon la corde BD et dont la hauteur est égale à la projection EF de la corde BD sur l'axe de rotation AH.

(*b*). Définition générale de la tangente à une courbe, en un point donné M de cette courbe. Mener la tangente à l'ellipse: 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point extérieur.

(*c*). Établir la relation qui existe dans la parabole entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe de la courbe et la distance de cette corde au sommet de cette même courbe.

Problème. — Sachant que $a + b + c = \pi$, établir l'égalité

$$\frac{\sin a + \sin b - \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}.$$

Académie de Montpellier.

I. — On donne deux droites parallèles x et y et un point P dont les distances respectives à ces deux droites sont a et b. On demande de mener par le point P deux droites rectangulaires telles que A étant le point où la première de ces droites rencontre x, et B le point où la seconde rencontre la droite y, la distance du point P à la droite AB soit égale à une quantité donnée h.

II. — Calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant la surface et le volume engendré par ce triangle en tournant autour de l'hypoténuse. Conditions pour que le problème soit possible.

Académie de Nancy.

1° Dans un cercle, de rayon R, est inscrit un trapèze ABCD. La diagonale AC fait un angle de $\alpha°$ avec la base AB et un angle de $\beta°$ avec le côté AD. 1° Trouver la longueur des arcs sous-tendus par les côtés du trapèze ainsi que l'angle des diagonales; 2° Calculer les segments des deux diagonales et l'aire du trapèze; 3° Évaluer le volume engendré par l'aire du trapèze tournant autour de la base AB.

2° Une personne emprunte un capital A et s'engage à payer, pour amortir cette dette, une même somme a à la fin de chaque année pendant n années consécutives, la première, un an après l'emprunt. Trouver le montant de l'annuité a. On tient compte des intérêts composés à x pour un franc par an pour le débiteur et pour le créancier. Que devient la valeur de a quand x s'annule? Que devient-elle quand x augmente indéfiniment?

Académie de Poitiers.

Questions à choisir (*a*). Division d'un polynôme entier en x par $x - a$. Forme du quotient et du reste. Condition de divisibilité

(*b*). Étude du trinôme du second degré. Changements de signe.

(*c*). Somme des carrés des n premiers nombres.

Problème. — Une tangente à une ellipse dont le grand axe est $2a$ et la distance des foyers $2c$ fait un angle α avec le grand axe. On demande de calculer : 1° l'angle qu'elle fait avec les rayons vecteurs; 2° la distance au centre de son point d'intersection avec le grand axe; 3° les rayons vecteurs du point de contact.

Académie de Rennes.

Questions à choisir (*a*). Sur une droite indéfinie on donne deux points A et B séparés par la distance $AB = a$. Trouver sur cette droite un point M tel que la longueur MA soit moyenne proportionnelle entre les longueurs AB et MB. Solution géométrique et algébrique. — Discussion.

(*b*). Figures symétriques. Différents modes de symétrie. Montrer que la symétrie par rapport à un plan se ramène à la symétrie par rapport à un point. Équivalence des figures symétriques.

(*c*). Volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre qui ne le traverse pas. Volume d'un segment sphérique

Problème. — On donne un angle $XOY = \theta$ et deux points A et B sur le côté OX, aux distances $OA = a$ et $OB = b$ du point O. M étant un point situé sur OY à la distance $OM = x$ du point O, on demande : 1° l'expression de la tangente des angles OMA et OMB; 2° celle de la tangente de l'angle AMB; 3° d'étudier la variation de ce dernier angle.

I. — Théorèmes relatifs au volume du tronc de pyramide à bases parallèles : 1° triangulaires ; 2° polygonales.

II. — A quelle distance du centre d'une sphère de rayon R faut-il mener un plan pour que le plus petit segment sphérique déterminé par ce plan soit équivalent au cône ayant pour base la section et pour sommet le centre de la sphère? — Discussion algébrique et construction géométrique.

Académie de Toulouse.

I. — Les deux équations
$$ax + by + cz = 0;$$
$$a'x + b'y + c'z = 0,$$
ou x, y, et z sont les inconnues, a, b, c, a', b', c' des nombres donnés sont toujours satisfaites par les valeurs $x = bc' - cb'$, $y = ca' - ac'$, $z = ab' - ba'$.

Montrer que si, parmi ces trois valeurs, il s'en trouve une différente de o les équations n'ont pas d'autres solutions que:

$$x = (bc' - cb')m;$$
$$y = (ca' - ac')m;$$
$$z = (ab' - ba')m.$$

II. — 1° Prouver que la différence des longitudes de deux points de la terre est égale à la différence des heures sidérales entre ces deux points, en un même instant.

2° Prouver que la latitude d'un point de la terre est égale à la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon de ce point.

3° x désignant un arc quelconque, exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

4° x désignant un arc positif moindre que 2π, et, a, un nombre positif donné, déterminer les valeurs de a qui satisfont à l'équation:

$$\sin 3x + a \sin 2x + 2 \sin x = 0.$$

QUESTION 529

Solution par M. DE TIMES.

On donne deux circonférences de rayons R *et* R′, *tangentes entre elles extérieurement. On construit une troisième circonférence tangente à chacune des deux premières et ayant son centre sur leur ligne des centres. Démontrer que le rayon* ρ *du cercle tangent à ces trois cercles est donné par la formule*

$$(1) \qquad \rho = \frac{RR'(R + R')}{R^2 + R'^2 + RR'}.$$

(E.-N. Barisien.)

Si O et O′ sont les centres des circonférences R et R′, et C le centre du cercle tangent à ces deux cercles, le rayon CD du cercle C est égal à R + R′.

D'après le théorème de Stewart, on a

$$\overline{OI}^2 \times \frac{CO'}{OO'} + \overline{O'I}^2 \times \frac{CO}{OO'} = \overline{CI}^2 + CO.CO,$$

ou

$$(R + \rho)^2 \times \frac{R}{R + R'} + (R' + \rho)^2 \times \frac{R'}{R + R'} = (R + R' - \rho)^2 + RR'$$

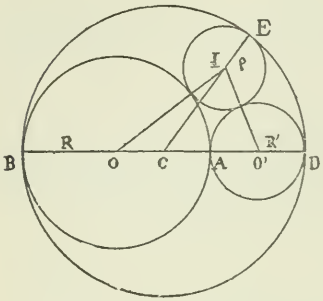
ou

$$(R+\rho)^2 \times R + (R'+\rho)^2 \times R' - (R + R' - \rho)^2 (R + R') = RR'(R+R').$$

Effectuant les calculs indiqués au premier membre de cette dernière égalité et réduisant les termes semblables, on a la formule (1).

Autrement *. — Soient

O_1, O_2, les centres des cercles, R, R′ les rayons;



O_3, le centre du cercle, r le rayon, sur la ligne O_1O_2;

O_4, le centre du cercle ρ.

On a

$$O_3O_4 = R + R' - \rho;$$

$$O_1O_2 = R + R'; \quad O_1O_3 = R';$$

$$O_3O_2 = R.$$

Par le théorème de Stewart, le triangle $O_1O_2O_4$ donne

$$(O_4O_1)^2(O_2O_3) + (O_2O_4)^2(O_3O_1)$$
$$= (O_1O_2)\,[(O_3O_4)^2 + (O_1O_3)\,(O_3O_2)]$$

ou $\quad R(R+\rho)^2 + R'(R'+\rho)^2 = (R+R')\,[(R+R'-\rho)^2 + RR']$

d'où $\quad \rho = RR'(R+R')\,:\,(R^2 + R'^2 + RR').$

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Foucart, élève au lycée Michelet; Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy; Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; Vazou.

(*) Cette seconde solution est de M. G.-W.-J. Greenstreet. *M. A.*

QUESTION 533

Solution (**) par M. H. Brocard.

Un régiment marche à la cadence de 120 *pas par minute; on demande quels sont les soldats qui poseront le pied droit sur le sol en même temps que la musique.*

Même problème en changeant la cadence. (Lucien Lévy.)

(**) En nous adressant cette solution, M. Brocard nous informe que lui-même a proposé cette question à des élèves du cours de physique des 1877, puis en 1885 et en 1888, et qu'il a fait mention de la même observation dans la deuxième édition de son cours lithographiée à Versailles en 1879-80 (§ 58).

Voici comment l'énoncé est formulé :

« Dans une *colonne* de troupes en marche à la cadence de 120 pas par minute, à quelles distances sont répartis les hommes se trouvant au même pas que la musique. On prendra $\frac{1000^m}{3}$ pour la *vitesse du son.* » (10 janvier 1885)

Au § 8 de mon Cours lithographié de 1880, je disais ceci : « Dans une

Suivant une observation de M. Catalan, il est nécessaire de spécifier la donnée numérique relative à la vitesse du son. En admettant, pour cette vitesse, 330 mètres par seconde, on voit que si la troupe formée en colonne, musique en tête, suit une route rectiligne, à la cadence de 120 pas par minute, c'est-à-dire d'un double pas par seconde, les hommes — marchant ou simplement marquant le pas — poseront le pied droit, par exemple, à chaque seconde, et le pied gauche, une demi-seconde après. A la cadence désignée ci-dessus, les hommes placés à des distances représentées par des multiples entiers de 330^m seront, pour un observateur de l'ensemble, au même pas que la musique. Si celle-ci vient à cesser de jouer, les hommes placés aux distances de 330^m, 660^m... feront encore un, deux... doubles pas. Le mouvement de marche — exécuté ou simulé — présentera donc l'aspect de pendules identiques échelonnés, battant la même durée, à la même phase de leur oscillation à tous les intervalles de 330^m et arrivant progressivement à leur point le plus bas.

La physionomie de ce mouvement mériterait, croyons-nous, d'être étudiée au kinétographe.

Les développements ci-dessus exposés font voir que la longueur du pas, si elle était indiquée, serait une donnée étrangère à la question. La véritable donnée utile n'est donc point la longueur du pas, mais sa vitesse.

Un changement de cadence revient donc à dire que les

---

colonne de troupes marchant à la cadence de la musique, les hommes qui occupent les extrémités de la colonne ne se trouvent point au même pas. C'est ce que l'on peut aisément observer lorsque la colonne a une centaine de mètres de longueur. »

Le 13 décembre 1888, j'ai donné aux élèves la question suivante (je copie textuellement) :

« Dans une colonne de troupes en marche, à la cadence de 120 pas par minute, à quelles distances se trouvent : 1° les hommes qui posent le pied gauche au même instant que les musiciens ; 2° ceux qui posent le pied gauche pendant que les musiciens posent le pied droit ?

» Quelle physionomie doit présenter la cadence du pas sur la profondeur de la colonne ?

» On admettra pour vitesse du son 1^{km} pour 3 secondes et pour longueur du pas $0^m,66$. »

Récemment, d'ailleurs, le même problème a été proposé dans les *Tablettes du chercheur* (1er mars 1894). *H. B.*

hommes feraient le double pas en N secondes. Mais, en N secondes, le son parcourt 330 N mètres. Les hommes placés aux distances multiples de 330 N seront donc au même pas que les musiciens.

Afin de rester dans les limites de la pratique, il conviendra de réduire à quelques unités seulement les modifications à proposer pour la cadence.

Soit, pour fixer les idées, une vitesse de 130 pas par minute.

Le double pas est alors de $0^s,923$ de durée. Par conséquent, les hommes posant le même pied que les musiciens seront à la distance que le son franchira en $0^s,924$, c'est-à-dire à $304^m,59$ et aux multiples entiers de cette distance.

Remarque. — Ce problème peut s'énoncer d'une autre manière : A quelles distances se trouvent les auditeurs d'un orchestre jouant sur un rythme *uniforme*, pour que les sons de la musique semblent correspondre aux mesures marquées par le chef d'orchestre ?

En réalité, l'occasion est rare de pouvoir observer avec facilité, sur une colonne suffisamment longue de troupes, le serpentement dont il vient d'être parlé ci-dessus, mais il est assez fréquemment donné de constater que, vu à certaines distances, un groupe de musiciens en marche est à un pas différent de celui qui correspond aux sons qui parviennent à l'oreille du spectateur, pour ensuite, à d'autres distances, se retrouver au même pas.

QUESTION 534

Solution par M. G. Tzitzéica, élève à l'École normale de Bucarest.

---

537. — *Résoudre*

$$(z^2 - K^2)^2 - 4K(z^3 - K)(Kz - 1) = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

On peut mettre l'équation sous la forme :

$$(1) \quad K^4 + 4z.K^3 - 2(2z^4 + z^2 + 2)K^2 + 4z^3.K + z^4 = 0.$$

L'équation proposée est donc réciproque (dans le SENS GÉNÉRAL) *par rapport à* k. Posons (*)

$$K + \frac{z^2}{K} = x.$$

L'équation (1) devient

$$x^2 + 4z.x - 4(z^4 + z^2 + 1) = 0,$$

d'où $$x = -2z \pm 2(z^2 + 1)$$

et par conséquent

$$z_1 = \frac{-K \pm (K-1)\sqrt{2K}}{1 - 2K}$$

$$z_2 = \frac{-K \pm (K+1)\sqrt{-2K}}{1 + 2K}.$$

On a toujours deux valeurs réelles pour z, et on n'en a que deux. Pour $k = 0$, on a $z = 0$.

Autrement (**). — On a

$$(z^2 - K^2)^2 - 4K(z^3 - K)(Kz - 1)$$
$$= z^4(1 - 4K^2) + 4Kz^3 - 2K^2z^2 + 4K^3z + K^4 - 4K^2$$
$$= [z^2(1 - 2K) + 2Kz + K^2 - 2K].[z^2(1 + 2K) + 2Kz + K^2 + 2K].$$

L'équation proposée admet donc les quatre solutions :

$$z = \frac{-K \pm (K-1).\sqrt{2K}}{1 - 2K},$$

$$z = \frac{-K \pm (K+1).\sqrt{-2K}}{1 + 2K}.$$

Nota. — Nous avons reçu une autre solution de M. Antoine DAVIDOGLOU, élève au lycée de Berlad (Roumanie). L'auteur observe que l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(z + K)^4 = 4K^2(z^2 + 1)^2, \text{ etc.}$$

QUESTION 535

Solution par M. J. DHAVERNAS, élève au Lycée Michelet.

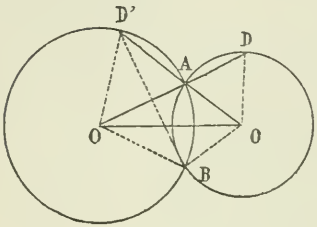
Soient A *et* B *les points d'intersection de deux circonférences* O *et* O'.

Le rayon AO *coupe la circonférence* O' *en* D ; AO' *coupe* O *en* D'.

(*) Voyez G. de Longchamps, *Alg.*, page 481.
(**) Cette seconde solution est de Mme Vve F. PRIME.

Les cinq points B, O, O′, D *et* D′ *sont sur une même circonférence.* (Droz-Farny.)

Les triangles isoscèles AOD′ et DAO′ sont évidemment semblables; on a donc



$$\widehat{OD'O'} = \widehat{ODO'}.$$

Ainsi, les points O, D′, D, O′ sont sur un même cercle.

$\widehat{O'OB} = \widehat{BD'A}$, comme ayant même mesure : $\frac{\widehat{AB}}{2}$.

O′, D, O, B sont donc sur une même circonférence.

Par suite, il en est de même des points O, O′, D, D′, B.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; W. J. Greenstreet, *M. A;* E. Foucart; G. Tzitzéica, élève à l'école normale de Bucarest; et Mme Ve F. Prime.

QUESTION 536 (*)

Solution par M. E. Lemoine.

Si, de l'orthocentre d'un triangle ABC, *on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle* A, *la droite qui joint leurs pieds passe par le milieu du côté* BC. (Droz-Farny.)

Notations :

H l'orthocentre, H_a le milieu de AH.

H'_a le pied de la hauteur de BC.

I et I′ les pieds des perpendiculaires abaissées de H sur la bissectrice de A et sur celle de son supplément.

L et N les milieux de BC et de AB.

Joignons II′ qui passe en H_a.

L'angle $IH_aH = 2HAI = B - C$.

Joignons LH_a, NH'_a.

Les deux angles $LH_aH'_a$, LNH'_a dans le cercle des neuf points ont même mesure.

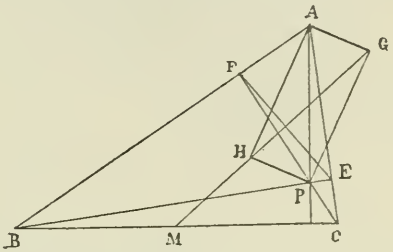
(*) Cette question, par méprise, a été reproduite sous le n° 549.

Or, $LNH'_a = LNB - H'_aNB = A - (180 - 2B) = B - C$.

$LH_aH'_a$ est donc égal à $B - C$.

Et la droite LH_a se confond avec H'.

Autrement (*). — Soient H, G les pieds des perpendiculaires sur les bissectrices AH, AG, abaissées de l'orthocentre P; BE, CF les hauteurs correspondant aux sommets B, C.



Alors P, H, F, A, G, E sont *concycliques*, le diamètre étant HG.

Or HG est la bissectrice de l'arc EHF; il divise la corde FE, en deux parties égales, et, de plus, est perpendiculaire sur FE.

Mais FE est une corde du cercle BFEC, dont le diamètre est BC;

Donc GH passe par M, milieu de BC.

Nota. — Autres solutions de MM. Foucart; J. de Times; J. Dhavernas; G. Tzitzéica et Mme Vve F. Prime.

QUESTION 537

Solution par A. Droz-Farny.

Le cercle inscrit à un triangle ABC *touche en* M *le côté* BC. *On prend, par rapport à la bissectrice de l'angle opposé à* BC, *le point* M' *symétrique de* M; *l'on mène la droite qui joint* M' *au milieu de* BC. *On construit des droites analogues à celle-ci au moyen des côtés* AB, AC. *Démontrer que les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point.* (Mannheim.)

La bissectrice AJ de l'angle A coupe le côté BC en L; la droite LM' sera évidemment la quatrième tangente com-

(*) Cette solution est de M. W.-J. Greenstreet. *M. A.*

mune au cercle inscrit et au centre ex-inscrit dans l'angle A. Si A′ est le point milieu de BC, on sait que A′B′ rencontre le cercle inscrit pour la deuxième fois en α, point de contact du cercle inscrit et du cercle d'Euler (voir Chadu; *Sur le cercle des neuf points; Nouvelle Correspondance*, tome V).

Autrement (*). — Soient N, P les points de contact relatifs aux côtés AC, AB. Le point M′ peut s'obtenir en menant MM′ parallèlement à PN; menons, de même, NN′ parallèle à PM. Dès lors:

$$\text{l'arc } PNM' = PN + NM' = PN + PM = N'M + PM$$
$$= \text{l'arc } PMN'.$$

La droite N′M′ est donc parallèle à AB et le triangle M′N′P′ est homothétique au triangle ABC, ainsi qu'à tous les triangles qui sont homothétiques à ABC.

QUESTIONS PROPOSÉES

567. — Étant donné un triangle ABC, trouver dans son plan un point M tel que les trois cercles BMC, CMA, AMB, se coupent sous des angles donnés. Il est bien entendu que ces angles doivent satisfaire à une condition. Ils seront définis, par exemple, par trois droites données menées d'un même point. *(Fouché.)*

568. — Résoudre l'équation

$$2(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)$$
$$+(x+\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^2+(x+\beta-\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)^2+(x+\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=0.$$

G. L.

(*) Cette solution est de Mme Ve F. Prime.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 16986-9-94.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. J. S. Mackay, professeur de Mathématiques.
à l'Académie d'Édimbourg.

NOTATIONS

Dans le triangle ABC les points

$$H,\ X,\ Y,\ Z$$

sont l'orthocentre et les pieds des hauteurs;

$$I,\ I_1,\ I_2,\ I_3$$

sont les centres des cercles inscrits et exinscrits;

$$D,\ E,\ F;\ D_1,\ E_1,\ F_1;\ \text{etc.}$$

sont les points de contact des cercles inscrits et exinscrits avec les côtés.

1. AX contient le point d'intersection de

D_2E_2,	D_3F_3	X_0
D_3E_3,	D_2F_2	X_1
DE,	D_1F_1	X_2
D_1E_1,	DF	X_3

BY contient le point d'intersection de

D_1E_1,	E_3F_3	Y_0
DE,	E_2F_2	Y_1
D_3E_3,	E_1F_1	Y_2
D_2E_2,	EF	Y_3

CZ contient le point d'intersection de

D_1F_1,	E_2F_2	Z_0
DF,	E_3F_3	Z_1
D_3F_3,	EF	Z_2
D_2F_2,	E_1F_1	Z_3

2.
$$AX_0 = BY_0 = CX_0 = r$$
$$AX_1 = BY_1 = CZ_1 = r_1$$
$$AX_2 = BY_2 = CZ_2 = r_2$$
$$AX_3 = BY_3 = CZ_3 = r_3.$$

3. Les droites les triangles

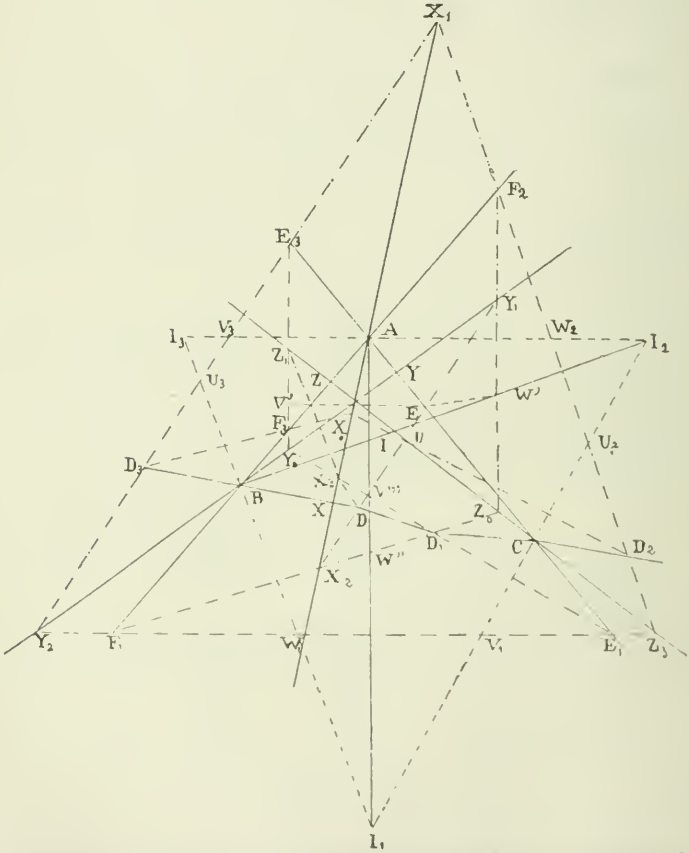
$$\left.\begin{array}{lll} E_1F_1, & F_2D_2, & D_3E_3 \\ EF, & F_3D_3, & D_2E_2 \\ E_3F_3, & DF, & D_1E_1 \\ E_2F_2, & D_1F_1, & DE \end{array}\right\} \text{déterminent} \left\{\begin{array}{l} X_1Y_2Z_3 \\ X_0Y_3Z_2 \\ X_3Y_0Z_1 \\ X_2Y_1Z_0. \end{array}\right.$$

4. Les quatre triangles

$$X_1Y_2Z_3, \quad X_0Y_3Z_2, \quad X_3Y_0Z_1, \quad X_2Y_1Z_0$$

sont semblables, et inversement situés, respectivement à

$$I_1I_2I_3. \quad II_3I_2, \quad I_3II_1, \quad I_2I_1I$$



et ont pour centre de leurs cercles circonscrits le point H, orthocentre du triangle ABC.

5. Les rayons des cercles circonscrits aux quatre triangles sont $2R + r$, $2R - r_1$, $2R - r_2$, $2R - r_3$

6. $\left.\begin{array}{ll} X_0D = AI, & X_1D_1 = AI_1 \\ Y_0E = BI, & Y_1E_1 = BI_1 \\ Z_0F = CI, & Z_1F_1 = CI_1 \end{array}\right\}$ et ainsi de suite.

7. Dans les quatre paires de triangles mentionnés plus haut, considérons les intersections des côtés (*).

Y_2Z_3	rencontre	I_1I_2,	I_1I_3	en	V_1, W_1
Z_3X_1	»	I_2I_3,	I_2I_1	»	W_2, U_2
X_1Y_2	»	I_3I_1,	I_3I_2	»	U_3, V_3
Y_3Z_2	»	II_3,	II_2	»	V', W'
Z_2X_0	»	I_3I_2,	I_3I	»	W_2, U''
X_0Y_3	»	I_2I,	I_2I_3	»	U''', V_3
Y_0Z_1	»	I_3I,	I_3I_1	»	V', W_1
Z_1X_3	»	II_1,	II_3	»	W'', U''
X_3Y_0	»	I_1I_3,	I_1I	»	U_3, V'''
Y_1Z_0	»	I_2I_1,	I_2I	»	V_1, W'
Z_0X_2	»	I_1I,	I_1I_2	»	W'', U_2
X_2Y_1	»	II_2,	II_1	»	U''', V'''.

On observera que quelques théorèmes sont implicitement contenus dans la notation précédente.

8. Les côtés des quatre triangles

$$DEF, \quad D_1E_1F_1, \quad D_2E_2F_2, \quad D_3E_3F_3$$

contiennent chacun quatre autres points de la figure.

EF	contient	Y_3	Z_2	V'	W'
FD	»	Z_1	X_3	W''	U''
DE	»	X_2	Y_1	U'''	V'''
E_1F_1	»	Y_2	Z_3	V_1	W_1
F_1D_1	»	Z_0	X_2	W'''	U_2
D_1E_1	»	X_3	Y_0	U_3	V'''
E_2F_2	»	Y_1	Z_0	V_1	W'
F_2D_2	»	Z_3	X_1	W_2	U_2
D_2E_2	»	X_0	Y_3	U'''	V_3

(*) Cette notation est un peu compliquée, mais on ne pouvait pas faire autrement. Plusieurs fois, j'ai essayé de la simplifier, mais sans succès. Ce qu'on gagne dans une direction, on le perd dans l'autre.

E_3F_3	»	Y_0 Z_1 V' W_1
F_3D_3	»	Z_2 X_0 W_2 U''
D_3E_3	»	X_1 Y_2 U_3 V_3

9. Les douze droites EF, FD, DE, etc., déterminent, par leurs intersections avec les six droites du quadrangle orthique $H_1I_2I_3$, des couples de pieds des hauteurs des triangles

$$\begin{array}{lll} I_1BC, & AI_2C, & ABI_3 \\ IBC, & AI_3C, & ABI_2 \\ I_3BC, & AIC, & ABI_1 \\ I_2BC, & AI_1C, & ABI. \end{array}$$

Les douze autres pieds sont les points D, E, F, etc.

Il peut être utile de se rappeler que ces quatre séries de triangles sont semblables à

$$I_1I_2I_3, \quad II_3I_2, \quad I_3II_1, \quad I_2I_1I.$$

10. Les figures suivantes forment des quadrangles orthiques :

$$\begin{array}{lll} X_0X_1D_2D_3\,; & Y_0Y_2E_3E_1\,; & Z_0Z_3F_1F_2 \\ X_2X_3DD_1\,; & Y_3Y_1EE_2\,; & Z_1Z_2FF_3\,. \end{array}$$

11. Par le point milieu de

BC	passent	X_0I, X_1I_1, X_2I_2, X_3I_3
CA	»	Y_0I, Y_1I_1, Y_2I_2, Y_3I_3
AB	»	Z_0I, Z_1I_1, Z_2I_2, Z_3I_3.

12. Le centre d'homologie des triangles $X_1Y_2Z_3$, $I_1I_2I_3$ est le point de Lemoine de ces deux triangles; et ainsi de suite.

13. Tous les points U sont sur une parallèle à BC
» V » » CA
» W » » AB.

14. Ces parallèles passent par A′, B′, C′, points milieux de BC, CA, AB.

15.
$$\begin{aligned} U_2U_3 &= V_3V_1 = W_1W_2 = p \\ U'U''' &= V_3V' = W'W_2 = p - a \\ U''U_3 &= V''V' = W_1W'' = p - b \\ U_2U''' &= V'''V_1 = W'W'' = p - c, \end{aligned}$$

où p désigne le demi-périmètre de ABC.

16. Les séries suivantes de six points sont concycliques.

U_2	U_3	V_3	V_1	W_1	W_2
U''	U'''	V_3	V'	W'	W_2
U''	U_3	V'''	V'	W_1	W''
U_2	U'''	V'''	V_1	W'	W''.

17. Ces quatre cercles sont les cercles de Taylor qui appartiennent au quadrangle orthique $II_1I_2I_3$.

18. Si l'on désigne les centres de ces cercles par

$$O_0 \quad O_1 \quad O_2 \quad O_3,$$

ces quatre points forment un quadrangle orthique.

Ils sont, en effet, les centres des cercles inscrits et exinscrits au triangle complémentaire $A'B'C'$.

19. Les six droites du quadrangle orthique $II_1I_2I_3$ sont les axes radicaux des cercles O_0, O_1, O_2, O_3 pris deux à deux; et les quatre points I, du même quadrangle, sont les centres radicaux des mêmes cercles pris trois à trois.

20. Les figures suivantes sont des trapèzes symétriques.

$W_2V_3W_1V_1$;	$U_3W_1U_2W_2$;	$V_1U_2V_3U_3$
$W_2V_3W'V'$;	$U'''W'U''W_2$;	$V'U''V_3U'''$
$W''V'''W_1V'$;	$U_3W_1U''W''$;	$V'U''V'''U_3$
$W''V'''W'V_1$;	$U'''W'U_2W''$;	$V_1U_2V'''U'''$.

21. Si l'on désigne les orthocentres des triangles

I_1BC,	AI_2C,	ABI_3	par	H_a, H_b, H_c
IBC,	AI_3C,	ABI_2	»	H'_a, H'_b, H'_c
I_3BC,	AIC,	ABI_1	»	H''_a, H''_b, H''_c
I_2BC,	AI_1C,	ABI	»	H'''_a, H'''_b, H'''_c,

les côtés de $H_aH_bH_c$ passent par X_0, Y_0, Z_0
» $H'_aH'_bH_c$ » X_1, Y_1, Z_1,
et ainsi de suite.

22. AH_a, BH_b, CH_c passent par O_0
AH'_a, BH'_b, CH'_c » O_1,
et ainsi de suite.

Quelques-unes de ces propriétés ne sont pas nouvelles. Voyez : 1° un mémoire du professeur Neuberg dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, tome Ier, pp. 50-53 (1874); 2° la 6e édition de *Casey's Sequel to Euclid*, p. 278 (1892); 3° l'ouvrage du professeur Fuhrmann, *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze*, p. 89 (1890).

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

Concours de 1894.

1re question. — Une lanterne est portée par une poulie mobile ; celle-ci repose sur une corde dont les extrémités sont fixées à deux points A et B dont la distance est plus petite que la longueur de la corde Déterminer la position d'équilibre L de la lanterne.

On supposera la corde inextensible et on négligera les dimensions de la poulie avec la lanterne et le poids de la corde.

2e question. — Un ingénieur prélève sur son traitement une économie de 3.000 francs par an qu'il place dans son industrie, moyennant un intérêt annuel de 10 o/o. Au lieu de toucher ses intérêts, il les laisse capitaliser. Quel est le nombre n des prélèvements auxquels il doit s'astreindre pour s'assurer, dans son industrie, un revenu d'au moins 3.000 francs.

Dès qu'il a atteint son but, notre ingénieur cesse toute économie sur son traitement et se contente de laisser capitaliser les intérêts à 10 o/o du capital qu'il s'est constitué. Trente ans après le début de ses économies, il se retire. A quel taux x doit-il chercher à placer son capital pour avoir un revenu annuel de 10.000 francs?

ÉCOLES NATIONALES D'AGRICULTURE

Concours de 1894.

I. — Soit un triangle isoscèle ABC dans lequel la base $BC = 2a$ et la hauteur $AA = h$.

1° Calculer, en fonction de a et de h, le rayon de la circonférence O tangente aux trois côtés du triangle;

2° On suppose que $h = a\sqrt{3}$ et l'on fait tourner la figure ABH autour de AH, elle engendre ainsi un cône et une sphère, calculer la portion du volume du cône extérieur à la sphère;

3° Appliquer la formule trouvée au cas où $a = \sqrt{3}$.

II. — Deux robinets complètement ouverts coulent dans un même récipient, le premier fournit 50 litres de purin à la minute, et le second donne 30 litres d'eau dans le même temps; après les avoir fait couler ensemble pendant 14 minutes, on ferme partiellement le deuxième robinet de manière à ne lui laisser fournir que la moitié du débit précédent, le premier reste complètement ouvert. 1° Combien de minutes faut-il encore les laisser couler pour que le mélange contenu dans le récipient contienne le $\frac{1}{3}$ de son volume d'eau; 2° On répand ensuite ce mélange total, à raison de 75 litres par are, dans un champ rectangulaire dont la largeur est les $\frac{3}{7}$ de la longueur. Calculer les dimensions de ce champ.

BACCALAURÉAT
(JUILLET 1894).

Académie de Paris.

I. — 1° Déterminer les arcs x et y vérifiant les équations

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1,$$
$$\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2° Inégalité des jours et des nuits (pour un lieu de la zone tempérée).

II. — 1° Soient B et b les bases d'un tronc de pyramide à bases parallèles. Calculer, en fonction de B et de b, la surface de la section faite dans ce tronc à égale distance des deux bases.

2° Trouver $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, connaissant $\sin a$. — Discussion.

Académie d'Alger.

1° Étudier la variation de l'expression

$$y = \frac{x^2 - 2x + p^2}{x^2 + 2x + p^2},$$

lorsque x prend toutes les valeurs réelles possibles et dans les trois cas suivants.

$$p > 1; \quad p = 1; \quad p < 1.$$

2° Composition de deux forces parallèles et de sens contraire.

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

I. — Construire deux cercles tangents entre eux, tangents, en outre, à une droite donnée en deux points donnés et enfin, tels que la somme de leurs aires soit donnée.

II. — 1° Dans un plan vertical sont placées deux droites fixes ox, oy, l'une horizontale, l'autre verticale. Une barre AB, rectiligne et pesante, s'appuie par ses deux extrémités A et B sur ox et sur oy. Il n'y a pas de frottement entre la barre AB et les droites ox et oy.

Démontrer que la barre AB n'est pas en équilibre lorsque le point d'appui A de AB sur ox n'est pas au point o. On calculera ensuite quelle force F il faudrait appliquer en A pour établir l'équilibre lorsque AB est incliné à 45° en supposant que AB est homogène et pèse 10 kilogrammes.

2° Démontrer que le cylindre circonscrit à une sphère est moyen proportionnel entre le volume de la sphère et celui du cône équilatéral circonscrit. On entend par cône équilatéral le cône de révolution dont la section plane pasaant par l'axe est un triangle équilatéral.

Académie de Besançon.

1° Tangentes communes à deux cercles. — Nombre de solutions, — Discussion.

2° Mettre $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ sous la forme de deux radicaux simples portant sur des expressions rationnelles en x.

Académie de Bordeaux.

Baccalauréat classique.

Choisir entre les sujets suivants :

1° Réduction d'une fraction ordinaire en fraction décimale. Condition de possibilité.

2° Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

3° Escomptes.

Problème. — Etant donné un tétraèdre régulier de côté a, calculer les rayons : 1° de la sphère circonscrite, 2° de la sphère tangente aux six arêtes; 3° de la sphère inscrite.

Baccalauréat ès lettres (Mathématiques).

Étant donnée une circonférence tangente à deux droites rectangulaires OA et OB, trouver un point M sur cette circonférence tel que si l'on construit le rectangle MPOQ de côtés MP et MQ parallèles à OB et OA, ce rectangle ait un périmètre donné. — Discussion.

II. Étant donné un tétraèdre régulier de côté a, etc... (Même sujet que pour le baccalauréat de l'enseignement secondaire classique.)

Académie de Caen.

Baccalauréat classique.

Choisir entre les sujets suivants :

1° Montrer directement que deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles. Lieu des droites perpendiculaires à un plan donné et tangentes à une sphère donnée.

2° Montrer entre quelles limites peuvent varier la somme des faces et la somme des dièdres d'un angle trièdre.

3° Mesure de la surface latérale d'un tronc de cône. Démonstration.

Sujet obligatoire. — Déterminer, sans employer les tables de logarithmes, toutes les valeurs de x comprises entre O et H et qui satisfont à l'équation

$$\cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0.$$

I. — Faire voir qu'en désignant par R une constante positive et par x, y, deux variables positives assujetties à la relation $x^2 + y^2 = R^2$, la somme $x + y$ atteint son maximum ou son minimum en même temps que le produit xy.

Trouver, en s'appuyant au besoin sur le résultat qui précède, le maximum et le minimum de la surface d'un rectangle circonscrit à un demi-cercle de rayon donné.

II. — Définir la vitesse à un instant donné dans un mouvement rectiligne quelconque.

En désignant par x la distance variable du point mobile à un point fixe pris sur la droite, on suppose que cette distance se trouve exprimée en fonction du temps t par la relation $x = \sin t$, calculer l'expression de la vitesse à un instant quelconque du mouvement.

Académie de Clermont.

I. — Calcul de π par la méthode dss isopérimètres.

II. — Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. Réciproque.

III. — Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan se ramène à une rotation ou à une translation.

(La première de ces questions est obligatoire pour les candidats au baccalauréat ès sciences complet.)

Problème (pour tous les candidats). — Dans un triangle rectangle OAB, les côtés de l'angle droit OA et OB ont pour longueurs respectives a et b. Trouver sur l'hypoténuse un point M tel que si l'on mène les perpendiculaires MP, MQ aux côtés de l'angle droit, le rayon du cercle inscrit dans le triangle OPQ ait une longueur donnée R.

Académie de Dijon.

I. — Résoudre un triangle, connaissant un côté a, le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit.

II. — Discuter pour toutes les valeurs de t les équations simultanées

$$(t+2)x + ty = 1$$
$$-3x + (t-2)y = 1$$

aux deux inconnues x et y. Puis, dans le cas où il est possible, donner toutes ses solutions.

Académie de Grenoble.

I. — Équation bicarrée. Résolution et discussion.

II. — On donne un cercle de centre O et de rayon R. Sur un de ses diamètres BC, on prend un point A entre O et C à une distance a du centre. On demande de mener, par le point A, une corde DAE qui soit égale à DB. On prendra pour inconnue la longueur AO.

Académie de Lille.

Questions de cours (au choix des candidats). I. — Définitions et propriétés des trièdres supplémentaires.

II. — Établir les conditions que doivent remplir trois angles plans pour qu'on puisse construire un trièdre ayant ses trois angles pour faces.

III. — Volume du tronc de prisme triangulaire.

Problème (pour tous les candidats). — On donne un cercle O de rayon R et deux diamètres rectangulaires ox, oy. D'un point A pris sur oy, on mène une tangente AB qui rencontre ox en C, et qui fait avec oy l'angle OAC $= \alpha$.

Le point A étant supposé variable sur oy, exprimer en fonction de α le volume du cône engendré par la rotation de OAC autour de oy. — Étudier la variation de ce volume.

Académie de Lyon.

I. — Variations de grandeurs du trinôme du deuxième degré. Représentation graphique.

II. — Une équerre à dessin, isoscèle, a $0^m,20$ de dimension suivant

l'hypoténuse. Elle est percée d'une ouverture circulaire de $0^m,01$ de rayon et dont le centre est à $0^m,02$ de chacun des côtés de l'angle droit.

Déterminer la position du centre de gravité de cette équerre que l'on suppose homogène et d'épaisseur uniforme.

Questions au choix. — 1° Solution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues.

2° Variations de grandeur du trinôme du second degré. Représentation graphique.

3° Logarithmes vulgaires. Définitions et propriétés.

Problème. — Une équerre, etc. (comme pour le baccalauréat ès sciences complet, ci-dessus.)

QUESTION 337

Solution par M. Dellac, professeur au lycée de Marseille.

Avec les $2n$ *éléments* $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots \pm l$, *on forme* 2^n *polynômes renfermant chacun* une *des lettres* $a, b, c, \ldots l$, *et on élève ces polynômes à la puissance* p *en mettant devant cette puissance le signe* $+$ *ou le signe* $-$ *suivant que le nombre des éléments négatifs du polynôme est pair ou impair. Soit* A_n^p *la somme algébrique de tous les termes. Démontrer que:*

1° La fonction A_n^p *est nulle pour toute valeur de* p *inférieure à* n, *et aussi pour toutes les valeurs de* p *qui surpassent* n *d'un nombre impair;*

2° $A_n^n = 2^n \times 1.2.3 \ldots n \times abc \ldots kl;$

3° $A_n^{n+2} = 2^n \times 4.5.6 \ldots (n+2) \times abc \ldots kl \times (a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2);$

4° $A_2^{2q} = 4b.\frac{2q}{1}.a^{2q-1} + 4b^3 \frac{2q(2q-1)(2q-2)}{1.2.3} a^{2q-3} + \ldots;$

5° $$n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n - \ldots + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}(n-2p)^n + \ldots (-1)^n(-n)^n = 2^n \times 1.2.3\ldots n.$$

Je remarque d'abord que la fonction A_n^p est symétrique par rapport aux lettres $a, b, c \ldots l$.

On a $$(a+b+\ldots+k+l)^p = (a+b+\ldots+k)^p + pl(a+b+\ldots+k)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}l^2(a+b+\ldots+k)^{p-2} + \ldots$$

$$(a + b + \ldots + k - l)^p$$
$$= (a + b + \ldots + k)^p - pl(a + b + \ldots + k)^{p-1}$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2} l^2(a+b+\ldots+k)^{p-2} - \ldots$$

d'où, en retranchant,

$$(a + b + \ldots + k + l)^p - (a + b + \ldots + k - l)^p$$
$$= 2.l.p(a+b+\ldots k)^{p-1} + 2\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} l^3(a+b+\ldots+k)^{p-3} + \ldots$$

La fonction A_n^p est la somme de tous les groupes analogues au précédent que l'on obtient en alternant de toutes les manières possibles les signes des lettres a, b, ... k, et en mettant devant chaque terme le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le nombre des éléments négatifs est pair ou impair.

Donc

$$(1) \qquad A_n^p = 2l.p.A_{n-1}^{p-1} + 2l^3.\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} A_{n-1}^{p-3} + \ldots$$

l étant la lettre qui entre dans A_n^p et n'entre pas dans A_{n-1}^{p-1}.

C'est là une formule de récurrence qui permettrait de calculer successivement toutes les fonctions A.

1° Si p est plus petit que n, A_n^p est nul. Supposons la loi vraie jusqu'à $n - 1$; la formule (1) fait voir qu'elle est vraie encore pour l'indice n. Or il est facile de la vérifier pour $n = 2$; donc elle est générale.

La fonction A_n^p est nulle aussi lorsque p surpasse n d'un nombre impair. Dans la formule (1), remplaçons p par $n+2q+1$; il vient

$$A_n^{n+2q+1} = 2l.p.A_{n-1}^{n+2q} + 2l^3\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} A_{n-1}^{n+2q-2} + \ldots$$

Il est facile de voir que A_n^{n+2q-1} est nul pour $n = 1$, quel que soit q; en effet, on a par définition :

$$A_1^{1+2q+1} = (+a)^{2q+2} - (-a)^{2q+2} = 0.$$

Par suite, la formule précédente montre que la loi est vraie pour $n = 2$; puis, pour $n = 3$, etc.

Quant aux fonctions dans lesquelles p surpasse n d'un nombre pair, elles ne sont pas nulles et leur valeur se complique de plus en plus.

2° Si, dans la formule (1), on fait $p = n$, tous les A du

second membre sont nuls, d'après ce qui précède, à l'exception du premier, et l'on a

$$A_n^n = 2l.n.A_{n-1}^{n-1}.$$

Remarquons que $A_1^1 = 2a$. Donc, en donnant à n successivement les valeurs $1, 2, 3 \ldots n$, on a

$$\begin{aligned} A_1^1 &= 2a \times 1, \\ A_2^2 &= 2b \times 2.A_1^1, \\ A_3^3 &= 2c \times 3.A_2^2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_n^n &= 2l \times n.A_{n-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Multipliant et réduisant, on a :

$$A_n^n = 2^n \times 1.2.3 \ldots n \times abc \ldots l.$$

C. Q. F. D.

3° Considérons le cas de $p = n + 2$. Je dis que la formule générale dans ce cas est

$$A_n^{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1.2.3}(a^2 + b^2 + c^2 + \ldots l^2)A_n^n.$$

Supposons la loi vraie jusqu'à $n - 1$; nous allons faire voir qu'elle est vraie aussi pour n. Si, dans la formule (1). on fait $p = n + 2$, on a

$$A_n^{n+2} = 2l(n+2)A_{n-1}^{n+1} + 2l^3 \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} A_{n-1}^{n-1}.$$

Or. par hypothèse, on a

$$A_{n-1}^{n+1} = \frac{(n+1)n}{1.2.3}(a^2 + b^2 + \ldots + k^2)A_{n-1}^{n-1}.$$

Substituant, il vient

$$A_n^{n+2} = 2l \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}(a^2 + b^2 + \ldots + k^2 + l^2)A_{n-1}^{n-1},$$

et comme $\qquad 2lnA_{n-1}^{n-1} = A_n^n.$

on a

$$A_n^{n+2} = \frac{(n+2)(n+1)}{1.2.3}(a^2 + b^2 + \ldots + k^2 + l^2)A_n^n.$$

C. Q. F. D.

Or, la formule est facile à vérifier pour $n = 1$, donc elle est vraie pour $n = 2$, puis pour $n = 3$ etc.

Si on y remplace A_n^n par la valeur trouvée au § 2. on obtient la formule donnée au § 3.

On trouverait d'une manière analogue

$$A_n^{n+4} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}\left\{\frac{\Sigma a^4}{4.5} + \frac{\Sigma a^2b^2}{1.2.3}\right\} A_n^n$$

$$A_n^{n+6} = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}$$

$$\left\{\frac{\Sigma a^6}{4.5.6.7} + \frac{\Sigma a^4b^2}{1.2.3.4.5} + \frac{\Sigma a^2b^2c^2}{(1.2.3)^2}\right\} A_n^n.$$

4° Dans le cas de $n = 2$, on peut donner la formule générale pour A_2^{2q}.

Dans la formule (1), faisons $n = 2$,

$$A_2^p = 2b.p.A_1^{p-1} + 2b^3 \frac{p(p-1)(p-3)}{1.2.3} A_1^{p-3} + \ldots$$

Or, si t est impair, on a

$$A_1^t = 2a^t.$$

Donc en faisant $p = 2q$, la formule précédente devient

$$A_2^{2q} = 4b \frac{2q}{1} a^{2q-1} + 4b^3 \frac{2q(2q-1)(2q-2)}{1.2.3} a^{2q-3} + \ldots$$

Exemples:

$q = 2 \quad A_2^4 = 16ab(a^2 + b^2).$

$q = 3 \quad A_2^6 = 8ab(3a^4 + 3b^4 + 10a^2b^2) = 8ab(3a^2 + b^2)(a^2 + 3b^2),$

$q = 4 \quad A_2^8 = 32ab(a^6 + b^6 + 7a^4b^2 + 7a^2b^4)$

$\qquad = 32ab(a^2 + b^2)(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$

5°. — La dernière formule résulte de la comparaison que l'on peut faire de la méthode précédente avec une nouvelle méthode permettant d'établir les formules des paragraphes 1° et 2°.

La fonction A_n^p s'annule lorsqu'on y fait $l = 0$, car les termes qui ne différaient que par $+l$ et $-l$ deviennent égaux deux à deux; et comme, par définition, ils ont des signes contraires, ils se détruisent. Donc la fonction est divisible par l; pour la même raison, elle est divisible par a, b, c... Donc on a

$$A_n^p = N.abc \ldots kl.$$

Si p est inférieur à n, le coefficient N est nul, car autrement la fonction A_n^p serait divisible par une autre de degré supérieur.

Si p surpasse n d'un nombre impair, les termes se détruisent deux à deux. En effet, les polynomes qui entrent dans A_n^p

sont deux à deux égaux et de signes contraires, par exemple $-a+b-c\ldots$ et $+a-b+c\ldots$ Soit t le nombre des éléments négatifs du premier de ces deux polynomes; dans le second, ce sera $n-t$; la différence est $2t-n$ ou $n-2t$; elle est donc de même parité que n. Par suite, si n est pair, les deux termes ont le même signe extérieur; comme alors les exposants sont impairs, les deux puissances ont des signes contraires et se détruisent; si, au contraire, n est impair, les signes extérieurs sont différents; mais alors les exposants sont pairs et les termes se détruisent encore. La fonction est donc nulle.

On voit au contraire que, si p surpassait n d'un nombre pair, les termes provenant des polynomes égaux et de signes contraires s'ajouteraient. Par suite, on pourrait regarder les fonctions A_n^p comme doubles des fonctions B_n^p obtenues en donnant à la lettre a seulement le signe $+$.

Dans le cas de $p=n$, on a

$$A_n^n = N \times a.b.c\ldots k.l,$$

et N est un coefficient numérique.

Pour calculer sa valeur je fais

$$a=b=c=\ldots=l=1.$$

La valeur que prend la fonction A_n^n, dans ce cas particulier, est précisément la valeur de N.

Il y a un seul terme n'ayant que des éléments positifs: sa valeur est n^n.

Il y a n termes ayant un élément négatif; la valeur du polynome est $n-2$; celle du terme est $(-1)^1(n-2)^n$, et l'ensemble de ces termes donne $(-1)^1 n(n-2)^n$.

Le nombre des termes ayant deux éléments négatifs est égal au nombre des combinaisons que l'on peut former avec n lettres prises deux à deux, c'est-à-dire égal à $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

La valeur de l'un de ces polynomes est $(n-4)$; celle de l'un des termes est $(-1)^2(n-4)^n$; et leur ensemble est $(-1)^2\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n$, etc.

La fonction N est donc

$$N = n^n + (-1)^1 n(n-2)^n + (-1)^2 \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}(n-2p)^n + \ldots + (-1)^n(-n)^n.$$

En comparant ce coefficient avec celui que nous a donné la première méthode, on obtient la formule du paragraphe 3°.

Remarque. — La fonction

$$(a+b+c+\ldots+l)^p + x\Sigma(-a+b+c\ldots+l)^p$$
$$+ x^2\Sigma(-a-b+c+\ldots+l)^p + \ldots + x^n\Sigma(-a-b\ldots-l)^p$$

est divisible par $x+1$ pour toutes les valeurs de p inférieures à n, ainsi que pour les valeurs de p qui surpassent n d'un nombre impair.

QUESTION 387

Solution par H. Dellac, professeur au lycée de Marseille.

Quel est le plus petit nombre entier, premier avec $1.2.3\ldots n$? (Catalan.)

C'est le premier nombre premier qui vient après n.

Pour le démontrer, je m'appuierai sur ce lemme vérifié par M. Bertrand (*), et démontré depuis par Tchebychef (**).

Entre un nombre quelconque et son double il y a au moins un nombre premier.

Cela posé, entre n et $2n$ il y a un ou plusieurs nombres premiers; soit p le plus petit. Il satisfait à la question si un nombre non premier q, compris entre n et p, ne peut pas satisfaire à la question. Soit $q = q'.q''$. On a

$$q < p < 2n$$

et, par suite,

$$q' < n.$$

Donc q' est compris dans le produit $1.2.3.\ldots n$, et par suite q n'est pas premier avec ce produit.

(*) *Journal de l'École polytechnique*, XXXe cahier.

(**) *Journal de Liouville*, tome XVII, p. 381.

QUESTION 441

Solution par M. Dellac, professeur au lycée de Marseille.

Chercher la condition pour que l'on ait, quel que soit θ,

$$a \sin b\theta - b \sin a\theta = M . \sin^3 \theta.$$

(Greenstreet.)

Cette identité peut s'écrire, en posant $M = 4m$,

$$(1) \qquad a \sin b\theta - b \sin a\theta = m(3 \sin \theta - \sin 3\theta),$$

Prenons plusieurs dérivées successives

$$\cos b\theta - \cos a\theta = \frac{3m}{ab}(\cos \theta - \cos 3\theta),$$

$$(2) \qquad b \sin b\theta - a \sin a\theta = \frac{3m}{ab}(\sin \theta - 3 \sin 3\theta),$$

$$b^2 \cos b\theta - a^2 \cos a\theta = \frac{3m}{ab}(\cos \theta - 9 \cos 3\theta),$$

$$(3) \qquad b^3 \sin b\theta - a^3 \sin a\theta = \frac{3m}{ab}(\sin \theta - 27 \sin 3\theta).$$

Entre (1), (2), (3), j'élimine $\sin a\theta$ et $\sin b\theta$; on a

$$\begin{vmatrix} a & b & ab(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta) \\ b & a & \sin \theta - 3 \sin 3\theta \\ b^3 & a^3 & \sin \theta - 27 \sin 3\theta \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$ab(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta)(ba^3 - ab^3) - (\sin \theta - 3 \sin 3\theta)(a^4 - b^4)$$
$$+ (\sin \theta - 27 \sin 3\theta)(a^2 - b^2) = 0.$$

Cette condition est satisfaite par $a = b$; mais cela conduirait à prendre $M = 0$. Laissant cette solution de côté, on peut supprimer le facteur $a^2 - b^2$, et l'on a

$$(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta) a^2b^2 - (\sin \theta - 3 \sin 3\theta)(a^2 + b^2)$$
$$+ (\sin \theta - 27 \sin 3\theta) = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu, quel que soit θ, ce qui exige que les coefficients de $\sin \theta$ et $\sin 3\theta$ soient nuls séparément. On a donc

$$a^2 + b^2 = a^2b^2 + 1, \qquad 3(a^2 + b^2) = \frac{a^2b^2}{3} + 27,$$

d'où $$a^2 + b^2 = 10, \qquad a^2b^2 = 9.$$

On en conclut

$$a^2 = 9 \quad b^2 = 1, \qquad \text{ou} \qquad a^2 = 1 \quad b^2 = 9,$$

et par suite

$$a = \pm 3 \quad b = \pm 1, \qquad \text{ou} \qquad a = \pm 1 \quad b = \pm 3.$$

Ayant trouvé a et b, on obtiendra la valeur de M en donnant à θ une valeur particulière, par exemple $\theta = 30^\circ$.

Toutes les combinaisons de signes précédentes donnent la solution unique

$$3 \sin \theta - \sin 3\theta = 4 \sin^3 \theta.$$

QUESTION 469 (*)

Solution par M. H. Brocard.

Résoudre l'équation

$$\left(3 + \frac{1}{1 + 2x}\right)^2 = 4(1 - x)(1 + x)^2 + \left(2x^2 + 2x - 1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)^2.$$

(Lauvernay.)

L'équation donnée, mise sous forme entière, devient

$$(2 + 3x)^2 = (1 - x)(1 + x)^2(1 + 2x)^2 + (2x^3 + 3x^2 - 1)^2$$

ou

$$(2x^3 + 3x^2 - 3x - 3)(2x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (1 - x)(1 + x)^2(1 + 2x)^2 = 0.$$

Mais le polynôme $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ est divisible par $2x + 1$ et donne pour quotient $x^2 + x + 1$. Il reste donc

$$(2x^3 + 3x^2 - 3x - 3)(x^2 + x + 1) + (1 - x)(1 + x)^2(1 + 2x) = 0,$$

ou $$f(x) = 2x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

On peut écrire

$$f(x) = x^3(2x^2 + 3x - 1) - (2x^2 + 3x - 1) - 3$$

et l'on est conduit à considérer les deux courbes

$$y = 2x^2 + 3x - 1, \qquad y = \frac{3}{x^3 - 1},$$

dont les intersections font reconnaître l'existence de trois racines réelles comprises entre 1 et 2, 0 et -1, -1 et -2. Il y a deux autres racines imaginaires.

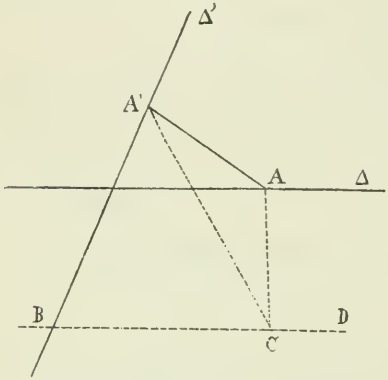
(*) Il s'est glissé, évidemment, dans la composition de cet énoncé, une erreur typographique; mais l'auteur, que nous avons consulté à ce sujet, n'a pu rétablir l'énoncé correct. (G. L.)

QUESTION 538

Solution par M. A. Droz-Farny.

Soit Δ *une droite donnée; par un point fixe* B *on fait passer une droite* Δ' *et l'on considère la plus courte distance des droites* Δ *et* Δ'. *Trouver le lieu décrit par le point commun à cette plus courte distance et à* Δ'. (Mannheim.)

Menons par B une parallèle D à Δ, puis par D un plan quelconque P. Soit A un point de Δ. De A, abaissons la perpendiculaire AC sur le plan P. D'après la construction bien connue BC sera une des positions de Δ' et C un des points du lieu.



En faisant varier A sur Δ, C décrit sur P une ligne droite parallèle à Δ et à D; elle représente le lieu, sur le plan P.

En faisant tourner P autour de D, cette droite décrit un cylindre de révolution, lieu géométrique des intersections des plans perpendiculaires l'un sur l'autre et passant respectivement par D et Δ. Ces deux droites sont deux génératrices diamétralement opposées du lieu cherché.

Remarque. — Cette question constitue un joli exercice de géométrie descriptive élémentaire.

Si l'on maintient la projection horizontale de Δ' fixe, en faisant varier la projection verticale, on constate immédiatement que le lieu est une ligne droite, perpendiculaire au plan horizontal, lorsque les droites Δ' sont dans un même plan projetant horizontalement.

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Grolleau, Tzitzéica, G. Foucart et Mme Ve F. Prime.

QUESTION 540.

Solution par M. G. Tzitzéica, élève à l'école normale supérieure de Bucarest.

Si l'on écrit l'unité à la gauche et à la droite de $3n - 1$ *zéros, le nombre ainsi obtenu n'est jamais premier.* (G. L.)

Le nombre en question peut s'écrire

$$10^{3n} + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1),$$

ce qui justifie l'énoncé.

Autrement. — Considérons les deux nombres

$$N = 99 \ldots 900 \ldots 01,$$
$$N' = 100 \ldots 01.$$

Dans N, les chiffres 9 sont en nombre n; les zéros en nombre $n - 1$. Dans N′, on suppose qu'il y a $n - 1$ zéros. Le produit de N par N′ donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{r} 99 \ldots 900 \ldots 01 \\ 99 \ldots 90 \ldots 01 \end{array}$$

En ajoutant ces deux produits partiels, on retrouve le nombre proposé.

Nota. — Autres solutions par Mme Ve F. Prime et M. Foucart, élève au lycée Michelet.

QUESTION 539

Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère le nombre 1001. *A gauche et à droite de ce nombre, on écrit :*

1° p − 2 *zéros,*
2° *le nombre* 101,
3° p − 1 *zéros,*
4° *l'unité.*

Le nombre ainsi formé n'est jamais premier. (G. L.)

Considérons le nombre

$$N = 1\underbrace{\ldots}_{A}9\underbrace{1\ldots}_{B}9\underbrace{1\ldots}_{C}1,$$

dans lequel on suppose

p zéros dans A, p zéros dans B, $p-1$ zéros dans C,
et le nombre N' : $N' = 1\underbrace{\ldots\ldots}_{D}1$,

D étant constitué par p zéros, la multiplication de N par N donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad 1\ldots\ldots 91\ldots\ldots 91\ldots\ldots 1 \\ 1\ldots\ldots 91\ldots\ldots 91\ldots\ldots 1 \end{array}$$

En faisant la somme, on a

$$\underbrace{1\ldots\ldots 101}_{A'}\underbrace{\ldots\ldots 1001}_{B'}\underbrace{\ldots\ldots 101}_{C'}\underbrace{\ldots\ldots 1}_{D'}.$$

Dans A' et dans D' il y a $p-1$ zéros; dans B' et dans C', il y a $p-2$ zéros. Le nombre considéré est donc égal à NN'.

On voit aussi facilement que le nombre proposé contient un nombre pair de chiffres; que les chiffres situés à des distances égales des extrêmes sont égaux; le nombre est donc divisible par 11.

QUESTION 541

Solution par M. A. Droz-Farny.

Sur chacun des côtés d'un triangle, on construit, intérieurement et extérieurement aux côtés, deux carrés. Montrer que :

1° Les droites joignant un centre de carré extérieur au sommet du triangle opposé au côté de ce carré concourent en un même point qui est l'orthocentre du triangle, formé par les centres des carrés extérieurs;

2° La distance d'un centre de carré extérieur, au sommet opposé du triangle est égale à la distance des deux autres centres extérieurs;

3° Si Σ désigne l'aire du triangle des centres des carrés extérieurs, Σ' l'aire du triangle des centres des carrés intérieurs, et S *l'aire du triangle donné, on a la relation* $\dfrac{\Sigma^2 - \Sigma'^2}{S} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ a, b, c *désignant les côtés du triangle.* (E.-N. Barisien).

Soient A', B', C' les centres des carrés extérieurs et ABDE le carré extérieur sur AB. Les triangles C'AB', EAC sont semblables, le rapport de similitude est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et les côtés

homologues forment entre eux des angles de 45°. On voit de même que le triangle ABA′ est semblable à EBC, même rapport de similitude et même angle entre les côtés homologues; il en résulte :

$$AA' = \frac{EC}{\sqrt{2}} = B'C',$$

et AA′ forme avec EC un angle de 45°, EC avec B′C′ aussi un angle de 45°; donc AA′ est perpendiculaire sur B′C′. Les deux premières parties sont ainsi démontrées.

On a $\Sigma = S + AC'B + AB'C + BA'C - C'AB' - C'BA' - A'CB$

$$= S + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{ab}{4}\sin(C+90^\circ) - \frac{bc}{4}\sin(90^\circ+A) - \frac{ac}{4}\sin(90^\circ+B)$$

$$= S + \sum \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}\sum ab\cos C$$

$$= S + \frac{1}{4}\sum a^2 - \frac{1}{8}\sum a^2,$$

d'où $$\Sigma = S + \frac{a^2+b^2+c^2}{8}.$$

De la même manière, on trouverait

$$\Sigma' = S - \frac{a^2+b^2+c^2}{8}.$$

Donc $$\Sigma + \Sigma' = 2S,$$

$$\Sigma - \Sigma' = \frac{a^2+b^2+c^2}{4},$$

et par multiplication $$\frac{\Sigma^2 - \Sigma'^2}{S} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

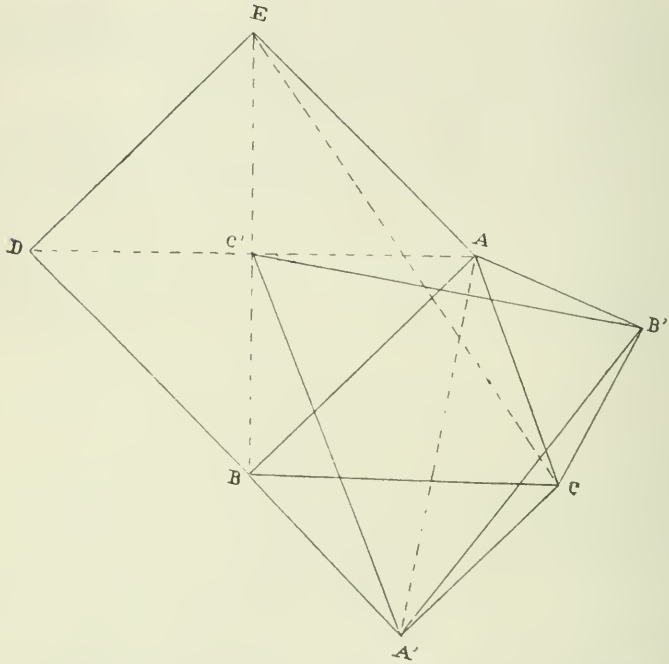
Remarque. — Les deux premières parties sont un cas particulier d'un théorème sur l'hyperbole de Kiepert.

Soit A′BC un triangle isoscèle, construit extérieurement sur le côté BC et αBC un second triangle isoscèle construit du même côté de la base BC et tel que angle αBC + A′BC = 90°.

Considérons, de même, sur les autres côtés du triangle, les paires de triangles isoscèles correspondants B′AC et βAC, C′AB et γAB. On sait que AA′, BB′, CC′ se coupent en x, Aα, Bβ, Cγ se coupent en y deux points de l'hyperbole de Kiepert tels que xy passe constamment par le centre du cercle circonscrit au triangle primitif. Les deux triangles de Kiepert

A′B′C′ et $\alpha\beta\gamma$ sont, en outre, tels que Aα est perpendiculaire sur B′C′, etc.

Les points A′ et α sur la médiatrice de BC constituent les éléments d'une involution dont les points doubles sont les centres des carrés extérieur et intérieur construits sur BC.



Appliquons le théorème précédent aux centres A′, B′, C′ des carrés extérieurs coïncidant avec les points α, β, γ, on pourra dire que :

Si A′, B′, C′ *sont les centres des carrés construits extérieurement (intérieurement) sur les côtés du triangle* ABC, *les droites* AA′, BB′, CC′ *sont égales et perpendiculaires aux côtés du triangle* A′B′C′ *et concourent en un même point* x *(ou* x′*) de l'hyperbole de Kiepert.* Ox *(ou* Ox′*) touche cette dernière au point* x *(ou* x′*).*

Nota. — Solutions diverses par Mme Ve Prime; MM. G. Tzitzéica, E. Foucart et Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

QUESTION 542

Solution par M. W.-J. Greenstreet (*M. A.*).

Résoudre les deux équations

$$xy = (a - b)(x - y),$$
$$ab(x + y)^2 = (a^2 - b^2)(bx - ay).$$

(E.-N. Barisien.)

Pour $y = mx$, nous avons, en divisant les deux égalités :

$$abm^3 - a^2m^2 + b^2m - ab = (am^2 + b)(bm - a) = 0,$$

d'où $\qquad m' = \frac{a}{b}, \qquad m'' = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}.$

Donc $\quad x = -\frac{1}{a}(a - b)^2, \qquad y = -\frac{1}{b}(a - b)^2, \qquad$ pour la racine m'.

Si a, b sont de même signe, les deux autres racines sont imaginaires; si l'on suppose, au contraire, $ab < 0$, les deux autres racines sont réelles; on les obtient sans difficulté.

Nota. — Solution analogue par Mme Ve F. Prime.

QUESTIONS PROPOSÉES

569. — Dans tout triangle, si h_A, h_B, h_C désignent les trois hauteurs, et si m_A, n_A désignent les deux segments déterminés par la hauteur h_A sur le côté opposé à cette hauteur, on a

$$\frac{m_A . n_A}{h_A} + \frac{m_B . n_B}{h_B} + \frac{m_C . n_C}{h_C} = 1.$$

(E.-N. Barisien.)

570. — Soit P un point variable d'une ellipse de grand axe AA′ et de foyers F, F′. Au point P correspond sur le grand axe un point I tel que A′I = F′P. La perpendiculaire élevée en I sur l'axe rencontre en M le diamètre OP. Le lieu du point M est une ellipse homothétique à la proposée.

(Droz-Farny.)

571. — Soit F un point fixe sur une circonférence. On construit les deux paraboles tangentes à la circonférence aux extrémités d'un diamètre et ayant le point F comme foyer. Démontrer que leurs directrices sont perpendiculaires l'une sur l'autre. Chercher le lieu de leur point d'intersection lorsque le diamètre varie. *(Droz-Farny.)*

572. — Dans un triangle ABC dont les hauteurs sont AA′, BB′, CC′, on prend les symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux sommets du triangle et on obtient ainsi un triangle A″B″C″. On prend encore les symétriques des sommets A, B, C par rapport aux pieds des hauteurs A′, B′, C′, et en obtient un triangle A‴B‴C‴.

Si S, S′, S″, S‴ représentent respectivement les aires des triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″ et A‴B‴C‴, on a les relations suivantes

$$S'' - S' = 6S,$$
$$S''' - 4S' = 3S,$$
$$4S'' - S''' = 21S. \qquad \textit{(E.-N. Barisien.)}$$

ERRATA

Page 193, ligne 10, en remontant, *lisez* du périmètre du triangle;

— 198. Le point que désigne la lettre D doit être sur la droite OC et non sur la droite O*i*;

— 200, ligne 20 *au lieu de* $\dfrac{-1-\cos\theta\,\dfrac{a}{b}+2\,\dfrac{a^2}{b^2}}{\left(\dfrac{a^2}{b^2}1++2.\dfrac{a}{b}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}(a^2+b^2+2.ab\cos\theta)}$

il faut $\dfrac{-1+\cos\theta\,\dfrac{a}{b}+2\,\dfrac{a^2}{b^2}}{\left(\dfrac{a^2}{b^2}+1+2\cos\theta.\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}(a^2+b^2+2ab\cos\theta)}$;

— 204, — 31 — du cercle inscrit *il faut* du centre du cercle inscrit;

— — — 31 — circonscrits — exinscrits;

— 205, — 29 — triangle — trièdre.

— — — 32 — *l* et *y* en *k* — P et O*y* en Q.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19044-10-94.

NOTE SUR LES FIGURES SEMBLABLES

Par M. **Dorlet**, professeur au lycée de Roanne.

Je me propose dans cette note d'étendre aux figures semblables de l'espace les théorèmes relatifs aux figures égales et aux figures semblables dans un plan.

Pour ne pas avoir à reproduire des démonstrations à peu près identiques, nous ferons les conventions suivantes : Deux figures sont dites directement ou symétriquement semblables lorsqu'on peut les placer de façon qu'elles soient directement ou inversement homothétiques. Le rapport d'homothétie, *positif* dans le premier cas, *négatif* dans le second, sera toujours appelé rapport de similitude des deux figures.

Il résulte de cette convention et d'un théorème connu sur les figures homothétiques que deux figures directement ou symétriquement semblables à une troisième, construites avec le même rapport de similitude, sont égales.

La valeur algébrique d'un segment AB, définie comme on sait, sera désignée par $\overline{AB}$. Nous aurons à utiliser le théorème suivant, dont la démonstration très facile est d'ailleurs bien connue :

Étant données deux droites qui se coupent en un point A ; *si, par deux points* B, C *de l'une d'elles, on mène des parallèles qui coupent l'autre aux points* B′, C′, *les valeurs algébriques des segments ainsi déterminés satisfont toujours à la relation*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}.$$

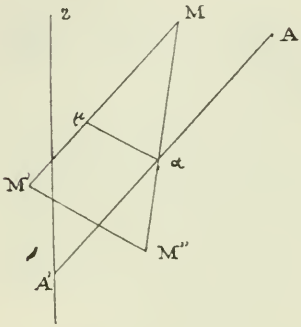
1. Théorème. — *Deux figures,* F *et* F′, *directement ou symétriquement semblables, peuvent être rendues homothétiques par une rotation de l'une d'elles autour d'un axe.*

Désignons par k le rapport de similitude de la figure F′ à la figure F, rapport que je supposerai différent de $+1$. Sur la droite AA′ *(fig. 1)*, joignant deux points homologues

choisis arbitrairement, il existe un point α et un seul satisfaisant à la relation

$$\frac{\overline{\alpha A'}}{\overline{\alpha A}} = k.$$

Je construis la figure F″ homothétique à F par rapport à α, avec un rapport d'homothétie égal à k. D'après le théorème rappelé au début, les figures F″ et F′ sont égales. D'autre part, dans chacune de ces figures, le point A′ est l'homologue d'un même point A de la figure F. Dans ces conditions, on sait que la figure F′ peut être amenée en coïncidence avec la figure F″ par une rotation autour d'un axe A′z passant par A′; elle sera alors homothétique à la figure F par rapport à α.



Remarque. — Le point α n'existe pas lorsque $k = 1$. Dans ce cas, qui est celui de deux figures égales, et qui sera toujours excepté dans la suite, on sait que, par une rotation autour d'un axe, on amène les deux figures à avoir la même orientation. Il est bien entendu que le théorème est exact dans tous les autres cas, par exemple dans celui de deux figures symétriques, qui correspond à $k = -1$.

De ce théorème, on déduit plusieurs conséquences :

1° Soient M, M′, M″ *(fig. 1)* trois points homologues des figures F, F′, F″. Le point M′ peut être amené en M″ par une rotation autour de A′z. Il en résulte que la droite M′M″ est dans un plan Q perpendiculaire à A′z. Menons par α un second plan P perpendiculaire à A′z, et soit μ le point où il coupe MM′. Les plans P et Q sont parallèles; il en est de même des droites M′M″ et $\alpha\mu$ suivant lesquelles ces plans coupent le plan MM′M″, et on a

$$\frac{\overline{\mu M'}}{\overline{\mu M}} = \frac{\overline{\alpha M''}}{\overline{\alpha M}} = k.$$

Le plan P partage donc chaque droite joignant deux points

homologues des figures F et F′ en segments additifs ou soustractifs dont le rapport est égal, en grandeur et en signe, au rapport de similitude.

2° Supposons que le point M soit pris dans le plan P. Le plan P contenant les points M et α contient le point M″, et par suite le point M′, puisque la droite M′M″ est dans un plan perpendiculaire à A′z. Tout point du plan P a donc son homologue dans ce plan. En d'autres termes, le plan P, considéré comme faisant partie de la figure F, est à lui-même son homologue dans la figure F′. Pour me conformer à une dénomination usitée dans le cas des figures planes, je l'appellerai le *plan double* des figures F et F′.

3° Les points des figures F et F′, qui sont situés dans le plan P, constituent deux figures f et f' qui peuvent être rendues homothétiques par une rotation de la figure f' autour du point où A′z coupe le plan P. Si k est différent de -1, les figures f et f' sont inégales, et on sait qu'elles admettent toujours un point double, I. Ce point sera aussi un point double des figures F et F′.

Si $k = -1$, les figures f et f' sont égales. Dans ce cas, elles ont un point double, et on rentre dans le cas précédent, ou bien on peut les faire coïncider par translation. Il est facile de voir qu'après cette translation, les figures F et F′ sont symétriques par rapport au plan P.

4° Dans la démonstration du premier théorème, le point A est arbitraire. Si on le place au point I, les points A′ et α sont confondus avec ce même point, et on voit que, par une rotation autour d'un axe Ix perpendiculaire au plan P, on peut rendre les figures F et F′ homothétiques par rapport au point I. La droite Ix est évidemment une droite double.

En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

Deux figures semblables ou symétriquement semblables, qui ne sont ni égales ni symétriques, ont toujours un plan double, une droite double perpendiculaire au plan double, et un point double qui est le pied de cette perpendiculaire. Le plan double détermine sur chaque droite joignant deux points homologues des segments dont le rapport est égal au rapport de similitude. Enfin, si on fait

tourner l'une des figures d'un angle convenable autour de la droite double, elle devient homothétique à l'autre par rapport au point double.

Le même théorème est vrai en général pour deux figures symétriques. Lorsqu'il ne l'est pas, les deux figures ont cependant un plan double, et on peut, par une translation, les rendre symétriques par rapport à ce plan.

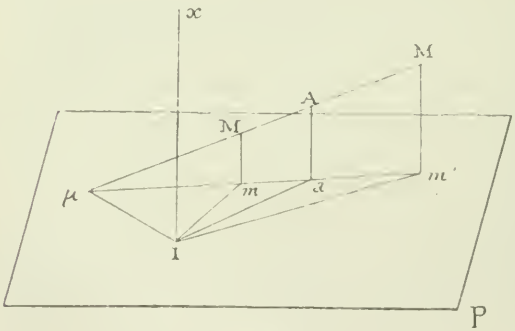
2. — Ce théorème se démontre analytiquement d'une façon très simple. Pour y parvenir, il convient de poser la question comme il suit :

Peut-on partager toutes les droites joignant deux points homologues de deux figures semblables dans un rapport tel que les points obtenus soient tous dans un même plan? Je signalerai seulement un théorème que l'on rencontre en suivant cette voie :

La somme des cosinus des trois angles que font trois directions rectangulaires de l'une des figures avec les directions homologues de l'autre est constante.

3. — Nous terminerons par un théorème relatif à la disposition des droites homologues.

Représentons le plan double P et la droite double Ix (*fig.* 2). Parmi les couples de points homologues, considérons ceux qui sont en ligne droite avec un point fixe A. Soient M et M′ deux de ces points, m, m' et a leurs projections et celle du point A sur le plan P. Ces projections et le point μ, où la droite MM′ coupe le plan P, sont en ligne droite. on verra facilement que les points m et m' sont des points



homologues, et que, par suite, le triangle Imm' a une forme constante. D'autre part, on a, d'après les théorèmes précédents, $\frac{\overline{\mu m'}}{\overline{\mu m}} = \frac{\overline{\mu M'}}{\overline{\mu M}} = k$. Donc la figure I$mm'\mu$ a une forme constante. Les angles de cette figure sont constants, et les points m, m' et μ décrivent des circonférences passant par les points I et a. Donc :

1° La droite MM′ décrit un cône ayant pour sommet A et pour base une circonférence passant par les points I et a. On peut en conclure que les droites joignant deux points homologues forment un complexe du deuxième ordre.

2° La droite Mm décrit un cylindre droit ayant pour base une circonférence passant par les points I et a.

3° Le cône et le cylindre, ayant une génératrice commune Aa, se coupent suivant une cubique gauche, qui est le lieu du point M. En raisonnant de la même façon pour le point M′, on voit que les points homologues qui sont en ligne droite avec un point fixe appartiennent à deux cubiques gauches dont les projections sur le plan P sont des circonférences.

Une partie des conclusions précédentes subsiste lorsque la droite MM′ ne passe pas par un point fixe. Ainsi la figure I$mm'\mu$ conserve toujours une forme constante. Il est aisé d'en conclure que les points μ, m et m' décrivent des figures semblables. Si donc, deux figures F et F′ sont semblables ou symétriquement semblables, les points qui partagent dans un rapport égal au rapport de similitude les droites joignant deux points homologues, constituent une figure plane, f, semblable à la projection de chacune des figures F et F′ sur le plan de la ligne f.

Plus généralement, *tout point qui partage* MM′ *dans un rapport donné, décrit une figure dont la projection sur le plan double est semblable à celles des figures* F *et* F′.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

346 (*). — *Résoudre en nombres entiers les équations :*

(1) $$(m^2+1)x^2+1=y^2,$$

(2) $$(m^2+1)x^2-1=y^2,$$

où m *est un entier donné.*

Si l'on considère les suites :

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2m\ \ldots\quad x_n=2mx_{n-1}+x_{n-2},$$
$$y_0=1,\quad y_1=m,\quad y_2=2m^2+1\ \ldots\quad y_n=2my_{n-1}+y_{n-2};$$

toutes les solutions de (1) sont données par les nombres x et y d'indice pair, et les solutions de (2) par les nombres x et y d'indice impair.

Considérés comme fonctions de m, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$(m^2+1)\frac{d^2x_n}{dm^2}+3m\frac{dx_n}{dm}-(n^2-1)x_n=0,$$
$$(m^2+1)\frac{d^2y_n}{dm^2}+m\frac{dy_n}{dm}-n^2y_n=0,$$

d'où l'on déduit aisément pour le développement de x_n et y_n :

$$x_n=(2m)^{n-1}+(n-2)(2m)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2m)^{n-5}$$
$$+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2m)^{n-7}+\ldots$$
$$y_n=2^{n-1}m^n+2^{n-3}n.m^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}m^{n-4}$$
$$+\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}m^{n-6}+\ldots$$

Pour x_n, on a aussi :

$$x_n=nm^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}m^{n-3}(m^2+1)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}m^{n-5}(m^2+1)^2+\ldots$$

347. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$x^2-(m^2-1)y^2=1$$

(m *entier quelconque donné).*

(*) Les questions 337 à 345 ont été publiées dans les numéros de septembre-octobre, du *Journal de Mathématiques spéciales*. Celles-ci, et celles que nous publierons dans le prochain numéro, par leur partie essentielle, *a résolution en nombres entiers*, se rattachent plus directement aux mathématiques élémentaires.

Toutes les solutions sont fournies par les suites :

$$x_0 = 1 \quad x_1 = m \quad x_2 = 2m^2 - 1 \ldots \quad x_n = 2mx_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_0 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 2m \ldots \quad y_n = 2my_{n-1} - y_{n-2}.$$

x_n, y_n, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$(m^2 - 1)\frac{d^2x_n}{dm^2} + m\frac{dx_n}{dm} - n^2x_n = 0,$$
$$(m^2 - 1)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3m\frac{dy_n}{dm} - (n^2 - 1)y_n = 0.$$

qui donnent, pour le développement de x_n et y_n :

$$x_n = 2^{n-1}m^n - 2^{n-3}nm^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}m^{n-4} - \ldots$$
$$y_n = (2m)^{n-1} - (n-2)(2m)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2m)^{n-5} - \ldots$$

On peut encore remarquer le développement suivant :

$$y_n = nm^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}m^{n-3}(m^2 - 1)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}m^{n-5}(m^2 - 1)^2 + \ldots$$

348. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$X^2 - a(a + 2)Y^2 + 2a = 0,$$

(a *entier quelconque donné*).

Toutes les solutions sont fournies par les suites récurrentes.

$$x_0 = a, \quad x_1 = 2a^2 + 3a \quad \ldots \quad x_n = 2(a + 1)x_{n-1} - x_{n-2};$$
$$y_0 = 1, \quad y_1 = 2a + 1 \quad \ldots \quad y_n = 2(a + 1)y_{n-1} - y_{n-2}.$$

Considerés comme fonctions du paramètre a, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles :

$$a(a + 2)\frac{d^2\frac{x_n}{a}}{da^2} + (2a + 3)\frac{d\frac{x_n}{a}}{da} - n(n + 1)\frac{x_n}{a} = 0,$$
$$a(a + 2)\frac{d^2y_n}{da^2} + (2a + 1)\frac{dy_n}{da} - n(n + 1)y_n = 0;$$

ce qui donne, pour les développements de x_n et y_n :

$$x_n = 2^n a^{n+1} + (2n + 1)2^{n-1}a^n + \frac{n - 1}{1.2}(2n + 1)2^{n-1}a^{n-1}$$
$$+ \frac{(n - 2)(2n - 3)}{1.2.3}(2n + 1)2^{n-2}a^{n-2} + \ldots$$
$$y_n = 2^n a^n + 2^{n-1}(2n - 1)a^{n-1} + 2^{n-2}a^{n-2}(n - 1)(2n - 3)$$
$$+ \frac{(2n - 3)(2n - 5)}{1.3}2^{n-3}(n - 2)a^{n-3} + \ldots$$

349. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$x^2 - m(m\alpha^2 + 2)y^2 = 1,$$

m *et* α *entiers donnés.*

On obtient toutes les solutions au moyen des suites récurrentes :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = m\alpha^2 + 1, \quad x_2 = 2m^2\alpha^4 + 4m\alpha^2 + 1,$$
$$x_3 = 4m^3\alpha^6 + 12m^2\alpha^4 + 9m\alpha^2 + 1, \ldots$$

et, en général : $x_n = 2(m\alpha^2 + 1)x_{n-1} - x_{n-2}$.

On a ensuite $y_0 = 0, \quad y_1 = \alpha, \quad y_2 = 2m\alpha^3 + 2\alpha,$

$$y_3 = 4m^2\alpha^5 + 8m\alpha^3 + 3\alpha, \ldots$$

en général : $y_n = 2(m\alpha^2 + 1)y_{n-1} - y_{n-2}$.

Considérés comme fonctions de m, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles :

$$m(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2x_n}{dm^2} + (m\alpha^2 + 1)\frac{dx_n}{dm} - n^2\alpha^2 x_n = 0;$$
$$m(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3(m\alpha^2 + 1)\frac{dy_n}{dm} - (n^2 - 1)\alpha^2 y_n = 0.$$

Considérés comme fonctions de α, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles :

$$(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2x_n}{d\alpha^2} + m\alpha\frac{dx_n}{d\alpha} - 4n^2 m x_n = 0,$$
$$(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} + 3m\alpha\frac{dy_n}{d\alpha} - (4n^2 - 1)m y_n = 0.$$

Ces équations permettent, comme dans les exercices précédents, d'obtenir le développement général de x_n et y_n.

BIBLIOGRAPHIE

Exercices d'Arithmétique, par F. J. (4e édition, à Tours, Alfred Mame et fils; à Paris, Ch. Poussielgue.)

Cette quatrième édition des *Exercices d'Arithmétique* appartient à une collection très intéressante; le succès qu'elle obtient nous paraît mérité.

Les professeurs de Mathématiques élémentaires, et les élèves de ce cours, trouveront dans l'ouvrage que nous leur recommandons ici de nombreux exercices; ils nous ont paru bien choisis et classés avec beaucoup d'ordre. Les uns sont présentés avec une solution, et même, pour certains, avec plusieurs solutions: les autres, plus faciles, ne sont pas résolus, mais le résultat qu'ils comportent est toujours indiqué.

Voici une citation qui pourra donner une idée de l'intérêt que nous avons trouvé à la lecture de ce petit livre.

Il s'agit de démontrer que *la somme* S_3 *des cubes de* n *premiers nombres est égale au carré de la somme de ces nombres.*

On déduit, ordinairement, cette propriété de la formule classique qui fait connaître S_3. Mais on peut, comme l'observe l'auteur des *Exercices d'Arithmétique*, établir cette relation par la voie directe, sans utiliser, sans connaître cette formule. La démonstration, très simple, peut se résumer ainsi.

On vérifie facilement la propriété pour les deux ou trois premiers

nombres. Supposons qu'elle soit vraie pour les $(n-1)$ premiers nombres et, en conséquence, posons :

$$1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=(1+2+\ldots+n-1)^2.$$

Nous avons

$$(1+2+\ldots+n)^2=[1+2\ldots+(n-1)]^2+\underline{2n[1+2+\ldots+(n-1)]}+n^2.$$

La partie soulignée est, par application d'une formule connue,

$$2n.\frac{n(n-1)}{2}+n^2=n^3;$$

donc, etc...

La démonstration donnée dans la *Théorie des nombres* de Lucas (p. 226) est moins simple, parce qu'elle repose sur la sommation des factorielles; elle est aussi moins naturelle.

Une autre démonstration, fondée sur le principe si fécond de la *Méthode indienne*, est exposée dans ce même ouvrage, p. 232. J'aurais voulu voir, à côté de la démonstration que je viens de reproduire, et qui m'a paru excellente, celle de la méthode indienne. Il y a, dans cette méthode, une idée mathémaique très simple et qu'il est bon de faire connaître, en l'accompagnant de quelques exemples, dans les cours de Mathématiques élémentaires.

A propos de la relation en question, on trouvera une Note de M. l'abbé Gelin dans le dernier numéro de *Mathesis* (p. 220). En désignant par S_p la quantité

$$1^p+2^p+\ldots+n^p,$$

l'égalité $$(S_p)^a=K(S_q)^b,$$

n'est possible que dans le cas qui correspond à la formule classique

$$(S_1)^2=S_3.$$

Cette question : $(S_1)^2=S_3$ *est-elle la seule relation de la forme* $(S_p)^a=(S_q)^b$? a été posée récemment par M. Niewenglowski dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1894, p. 8). Elle a reçu plusieurs solutions qu'on trouvera *loc. cit.*, pp. 29, 136, 159. On pourra consulter aussi, sur ce sujet, un article de M. Barbette (*Mathesis*, 1894, p. 105). *G. L.*

Algèbre *à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire classique et moderne* (manuel des baccalauréats), par M. P. Giraud, ancien élève de l'École polytechnique, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux. — Prix : 2 francs. Société d'éditions scientifiques.

Cet ouvrage a été fait *spécialement* en vue des derniers programmes des baccalauréats, ce qui donne le grand avantage d'une complète unité de plan sur la plupart des traités du même genre, rédigés d'après d'anciens programmes, et simplement *remaniés* depuis.

L'auteur s'est attaché à reproduire, aussi fidèlement que possible, la partie élémentaire d'un cours qu'il a constamment perfectionné pendant plusieurs années d'enseignement, couronnées par de nombreux succès de ses élèves aux diverses écoles du gouvernement.

Tout est ramené à des méthodes *générales*, et la clarté n'exclut pas la rigueur, poussée beaucoup plus loin que dans la plupart des ouvrages élémentaires; cela évite aux commençants les idées fausses, qu'ils prennent si souvent lorsque, sous prétexte de simplicité, on laisse dans l'ombre certains points délicats.

Nous sommes convaincu que tout élève sérieux, ayant étudié conscien-

cieusement ce manuel, aura parfaitemet compris son algèbre élémentaire et sera, sous ce rapport, largement de force à affronter le épreuves des divers baccalauréats.

Exercices de géométrie descriptive, par F. J. (3e édition, Alfred Mame et Cie, à Tours).

J'ai dit, autrefois (*Journal*, 1885, p. 117), tout le bien que je pensais de cet ouvrage arrivé aujourd'hui à sa 3e édition. J'applaudis de grand cœur au succès d'un livre trop peu connu, peut-être, de l'enseignement classique. Il mérite d'y pénétrer et les candidats aux Écoles y trouveront de nombreux et utiles exercices. L'édition actuelle renferme un grand nombre de questions nouvelles, un meilleur classement et des développements notables portant principalement sur les idées générales, idées très bien exposées dans l'introduction et dans le chapitre relatif aux *Compléments et Méthodes*. *G. L.*

Récréations mathématiques, par M. Edouard Lucas, professeur d Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. — 4 volumes petit in-8° caractères elzevirs, titre en deux couleurs.

Tome Ier — *Les Traversées. Les Ponts. Les Labyrinthes. Les Reines. Le Solitaire. La Numération. Le Baguenaudier. Le Taquin.* 2e édition; 1891. — Prix : Hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50 c.

Tome II. — *Qui perd gagne. Les Dominos. Les Marelles. Le Parquet. Le Casse-tête. Les Jeux de demoiselles. Le Jeu icosien d'Hamilton:* 1883. — Prix : Hollande, 12 fr. — Velin, 7 fr. 50 c.

Tome III. — *Le Calcul sur les doigts. Le Calcul et les machines à calculer. Le Jeu du caméléon et le jeu des jonctions de points. Le Jeu militaire et la prise de la Bastille. Le Jeu américain et ses dérivés : amusements par les jetons. L'Etoile nationale et les jeux de Rouge et Noire;* 1893. — Prix : Hollande, 9 fr. 50 c. — Velin, 6 fr.

Tome IV et dernier. — *Le Calendrier perpétuel. L'Arithmétique en boules. L'Arithmétique en bâtons. Les Mérelles au* XIIIe *siècle. Les Carrés magiques de Fermat* (*). *Les réseaux et les dominos. Les régions et les quatre couleurs. La Machine à marcher.* — Prix : Hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

Le tome IV et dernier de cette publication vient de paraître à la librairie Gauthier-Villars. Grâce au zèle et au dévouement de MM. Delannoy, Laisant et Lemoine, membres de la Société mathématique de France, les notes laissées par Lucas ont pu être classées ; elles forment la matière des deux derniers volumes. On peut aujourd'hui envisager l'œuvre complète de notre regretté camarade, apprécier toute sa valeur. C'est une œuvre originale et savante. Ceux qui ont longtemps fréquenté l'auteur y retrouvent l'ingéniosité et l'érudition d'un esprit sagace, éminemment productif, enlevé trop tôt à la science, sans avoir donné, croyons-nous, tout ce qu'il possédait.

L'avertissement placé à la tête du tome IV prévient le lecteur qu'on a trouvé dans les papiers de Lucas trois cahiers intitulés : *Arithmétique amusante*. Ce livre, auquel Lucas avait mis la dernière main, peu de temps avant sa mort, sera publié dans un court délai. Nous sommes heureux de l'annoncer aux nombreux amis de l'Arithmétique. *G. L.*

(*) Cette récréation a été publiée dans le *Journal* (1885, pp. 104, 130, 148, 176; 1887, p. 32). Je signale, à ce propos, une lacune que je ne me suis pas expliquée. Le *problème des seize officiers* qui est traité à la page 153 *(loc. cit.)* n'existe pas dans la rédaction reproduite au tome IV ?

Société Philomathique de Bordeaux, *XIIIe exposition de Bordeaux* (*), sous le patronage et avec le concours de l'État, du département de la Gironde, de la municipalité et de la Chambre de Commerce de Bordeaux.

La Société philomathique de Bordeaux organise pour le printemps de l'année 1895 et pour une durée de six mois, sa XIIIe Exposition générale.

En ouvrant cette Exposition, en faisant appel aux savants, aux artistes, aux industriels, aux agriculteurs, aux commerçants, aux philanthropes, la Société demeure fidèle à son programme tracé il y a près d'un siècle par ses fondateurs, et poursuivi depuis avec persévérance.

Organisatrice de douze Expositions bordelaises, dont la première remonte à 1827, la Société philomathique a vu successivement toutes ces entreprises couronnées de succès; la dernière exposition notamment, tenue en 1882, réunit plus de 6.000 exposants, et reçut plus d'un million de visiteurs.

Forte de ce passé, honorée pour son œuvre nouvelle des hauts patronages de l'État et du puissant concours des corps constitués, la Société philomathique se propose de donner à la XIIIe Exposition de Bordeaux 1895, une importance considérable et un éclat exceptionnel. Organisée sur la grande place des Quinconces, en plein centre du Bordeaux commercial et mondain, l'Exposition comportera plus de 35.000 mètres carrés de surface couverte, et plus de 6 hectares de jardins, où seront réunies les attractions les plus nouvelles et les plus élégantes; en sorte que, si la portée en est grande au point de vue du commerce, de l'industrie et du progrès, l'aspect en sera riant, agréable et gai pour les exposants et les visiteurs que la Société philomathique saura dignement recevoir.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES — MATHÉMATIQUES)

(Compositions du 20 octobre 1894. — Paris.)

I. — *Problème obligatoire :*

Inscrire, dans un hemisphère donné, un tronc de cône dont le volume soit dans un rapport donné avec la sphère qui a pour diamètre la hauteur du tronc. Discussion.

(*) Le règlement général de l'Exposition, publié au mois de janvier dernier, portait (Art. 3) que les demandes d'admission d'exposants devaient parvenir au Secrétariat général de la Société philomathique avant le 1er octobre 1894.

On nous prie de rappeler que cette date a été modifiée et que le délai de réception de ces demandes a été reporté jusqu'au *31 décembre 1894*.

Il importe néanmoins que les personnes désireuses de figurer à l'Exposition de Bordeaux se fassent connaître dans le plus bref délai possible, en envoyant dès maintenant leur bulletin de demande d'admission revêtu de toutes les indications susceptibles de fixer la Société philomathique sur leurs intentions, notamment au sujet de l'espace et des emplacements qu'elles désirent occuper.

Ces bulletins ainsi que tous autres documents sont tenus à la disposition des intéressés dans les bureaux de la Société, 4, cour du XXX-Juillet ou leur seront expédiés sur demande adressée au Secrétariat général.

II. — *Trois questions à choisir :*
(*a*). Inégalité des jours et des nuits.
(*b*). Inégalité des saisons.
(*c*). Mesure du temps. — Jour sidéral. — Jour solaire vrai et jour solaire moyen.

QUESTION 543

Solution par E. Lemoine.

Si H *désigne le point de rencontre des hauteurs,* G *le centre de gravité de l'aire,* O *le centre du cercle circonscrit et* I *le centre du cercle inscrit d'un même triangle, on a la relation*

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3(\overline{IG}^2 + 2\overline{GO}^2).$$

(Barisien.)

On a (voir *Comptes rendus du Congrès de Marseille* de l'Association française pour l'avancement des sciences, p. 133) :

$$\overline{HI}^2 = (2R + r)^2 + 2r^2 - p^2,$$

$$\overline{IG}^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr),$$

$$\overline{GO}^2 = R^2 - \frac{2}{9}[p^2 - r(4R + r)],$$

qui, avec la formule connue

$$\overline{OI}^2 = R(R - 2r),$$

démontrent immédiatement la relation en question.

Si l'on applique la *transformation continue en* A à la formule de M. Barisien, on a la nouvelle formule

$$\overline{HI_a}^2 + 2\overline{OI_a}^2 = 3(\overline{I_aG}^2 + 2\overline{GO}^2).$$

I_a est le centre du cercle exinscrit tangent au côté BC.

Dans les formules R, r, p désignent, comme à l'ordinaire, respectivement le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit et le demi-périmètre du triangle.

Autres solutions :

1° Par M. Greenstreet.

Le point G partageant la droite OH dans le rapport 2 : 1, nous avons dans le triangle IHO (par le théorème de Stewart) :

$$2\overline{OI}^2 + \overline{IH} = 3\overline{IG}^2 + \frac{2}{3}\overline{OH}^2 = 3\overline{IG}^2 + 6\overline{OG}^2.$$

2° Par M. Tzitzéica, à Bucarest.

Dans les « *Relations entre les éléments d'un triangle* » on trouve (formule 89) :

$$\overline{GI}^2 = \frac{2}{3}\overline{OI}^2 + \frac{1}{3}\overline{IH}^2 - \frac{2}{9}\overline{OH}^2,$$

or

$$HO = 3GO,$$

donc

$$\overline{HI}^2 + 2\overline{OI}^2 = 3(\overline{GI}^2 + 2\overline{GO}^2).$$

Nota. — Solutions diverses par Mme Ve F. Prime; MM. de Times; Foucart; Dhavernas; Droz-Farny, Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

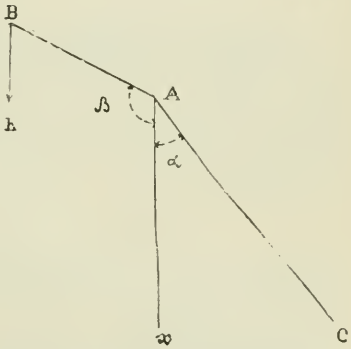
QUESTION 544

Solution par Mme Ve F. Prime.

Une barre coudée rigide BAC, *suspendue par le point* A, *porte en son extrémité* B *un poids fixe* K *et en son extrémité* C *un poids variable* P. *Dans sa position initiale, c'est-à-dire lorsque* P = 0, *un index invariablement lié au système* BAC *se dirige suivant la droite* AI_0. *Lorsqu'on donne à* P *une certaine valeur, il vient en* AI. *On demande de déterminer l'angle que* AI *fait avec* AI_0.

Cet énoncé renferme la théorie du pèse-lettres.

(M. d'Ocagne.)



Soient :

Ax la verticale menée par A ;

$2b$ la longueur AB ;

$2c$ la longueur AC ;

M le poids de la barre BAC rapporté à l'unité de longueur ;

α l'angle CAx, β l'angle BAx dans la position initiale du système ;

$\alpha - z$, $\beta + z$ les mêmes angles après l'addition du poids P en C.

L'équation d'équilibre est

$$b.(K + bm).\sin(\beta + x) = a(P + am).\sin(\alpha - x),$$

avec la condition initiale

$$b(K + bm).\sin\beta = a^2 m \sin\alpha.$$

On en tire

$$\operatorname{tg} x = \frac{a.\mathrm{P}.\sin\alpha}{b(\mathrm{K}+bm).\cos\beta + a(\mathrm{P}+am).\cos\alpha}.$$

Remarque. — I. Cette solution suppose la barre BAC homogène.

II. En faisant $m = 0$, $\beta = 0$ et $\alpha = 90°$, on a le pèselettres et la formule donne

$$\operatorname{tg} x = \frac{a.\mathrm{P}}{b.\mathrm{K}},$$

mais alors K désigne le poids du système BAC et b la distance de A au centre de gravité de ce système, ce centre était supposé en B.

QUESTION 545

Solution par M. G. Tzitzéica, élève à l'école normale supérieure de Bucarest.

Les droites qui joignent le centre de gravité G *d'un tétraèdre aux sommets* A_1, A_2, A_3, A_4 *interceptent sur les sphères déterminées par les points* (G, A_2, A_3, A_4), (G, A_3, A_4, A_1), (G, A_4, A_1, A_2), (G, A_1, A_2, A_3), *des segments* l_1, l_2, l_3, l_4 *qui vérifient la relation*

$$m_1l_1 + m_2l_2 + m_3l_3 + m_4l_4 = \sum d_{12},$$

m_1, m_2, m_3, m_4 *désignant les longueurs des médianes du tétraèdre, droites qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.*

Lorsqu'on remplace le centre de gravité par le centre I *de la sphère inscrite, la relation analogue est :*

$$\left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1 l_1 \mathrm{I}A_1\right) = 3\sum s_1 s_2 d_{12}.$$

s_1, s_2, s_3, s_4 *désignant les aires des faces du tétraèdre.*

(L. Bénezech.)

1° Prenons le tétraèdre donné pour tétraèdre de référence. L'équation générale des sphères qui passent par A_2, A_3, A_4, est en coordonnées barycentrique.

(1) $$A\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \sum d_{12}\alpha_1\alpha_2.$$

où $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = V$ (V désignant le vol. du tétr.)

Les sphères (1) passent par G si

(2) $$4A = \sum d_{12},$$

parce que $$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}V.$$

Soit K le point où A_1G rencontre la sphère (1), on a

$$A = A_1G \times A_1K = \overline{GA_1^2} + GA_1 \times GK$$

ou $$A = \overline{GA_1^2} + \frac{3}{4}\,lm_1.$$

L'égalité (2) devient

$$4\overline{GA_1^2} + 3l_1m_1 = \sum d_{12}.$$

On obtient, de même, trois relations analogues pour les autres sphères, d'où

$$4\sum\overline{GA_1^2} + 3\sum l_1m_1 = 4\sum d_{12}.$$

Or $$4\sum\overline{GA_1^2} = \sum d_{12}$$ (*J. M. E.* 1890, n° 7, p. 146.)

Donc $$\sum l_1m_1 = \sum d_{12}.$$ C. Q. F. D.

2° La sphère (1) passe par I si

(3) $$As_1\sum s_1 = \sum d_{12}s_1s_2$$

parce que $$\alpha_1 = \frac{1}{2}\rho s, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\rho s_2, \qquad \text{etc.}$$

Soit L le point où A_1I rencontre la sphère $IA_2A_3A_4$; on a

$$A = IA_1 \times A_1L = \overline{IA_1^2} + IA_1 \times l_1,$$

(3) devient

$$s_1\overline{IA_1^2}\sum s_1 + s_1l_1IA_1\sum s_1 = \sum s_1s_2d_{12}.$$

On obtient de même trois autres relations, d'où

$$\left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1\overline{IA_1^2}\right) + \left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1l_1IA_1\right) = 4\sum s_1s_2d_{12},$$

or $\left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1 \overline{\mathrm{IA}_1^2}\right) = \sum s_1 s_2 d_{12}$. (*J. M. E.*, loc. cit.)

Par conséquent,

$$\left(\sum s_1\right)\left(\sum s_1 l_1 \mathrm{IA}_1\right) = 3\sum s_1 s_2 d_{12}.$$

QUESTION 546 (*).

Résoudre l'équation

$$(x + a)(x + b)[2x^3 + (a + b)(a + b - x)^2] = 2(a + b)x[a^2(x + a) + b^2(x + b)].$$

(Sollertinsky.)

Deux racines sont évidentes : $x = a$, $x = b$, et la division, par $(x - a)(x - b)$, donne un quotient A égal à

$$2x^3 + 5(a + b)x^2 + 4(a + b)^2x + (a + b)^3;$$

mais $A = (a + b)[a + b + 2x]^2 + x^2(a + b + 2x)$

$$= (2x + a + b)(x + a + b)^2.$$

QUESTION 547

Solution par M. A. Droz-Farny.

Ω, Ω' étant les points de Brocard d'un triangle ABC, *on sait que ces points sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle. Cela posé, si l'on représente par* f *le grand axe de cette courbe, et que l'on fasse*

$A\Omega = u$, $B\Omega = v$, $C\Omega = w$; $A\Omega' = u'$, $B\Omega' = v'$ $C\Omega' = w'$,

on a $f = \sqrt[3]{u\ v\ w} = \sqrt{u'v'w'}$. (E. Catalan.)

On sait que les points de Brocard sont les foyers d'une ellipse touchant les côtés aux pieds des symédianes. Représentons par Ω_a, Ω'_a les pieds des perpendiculaires abaissées

(*) Nous n'avons pas reçu de solution pour cette question. Celle qui suit est de M. Sollertinsky.

de Ω, Ω' sur BC, par b_1 le demi-petit axe de l'ellipse considérée, on aura

$$\Omega\Omega_a . \Omega'\Omega'_a = b_1^2.$$

Mais $\Omega\Omega_a = \Omega B \sin\omega = \dfrac{c \sin^2 \omega}{\sin B}$; $\Omega'\Omega'_a = \Omega' B \sin\omega = \dfrac{b \sin^2 \omega}{\sin C}$.

Il en résulte $b_1^2 = \dfrac{bc \sin^4 \omega}{\sin B \sin C}$, donc $b_1 = 2R \sin^2 w$,

$$f^2 = 4b_1^2 + \overline{\Omega\Omega'}^2 = 4b_1^2 + 4R^2 \sin^2 \omega(1 - 4 \sin^2\omega) = 4 R^2 \sin^2 \omega.$$

$$f = 2R \sin \omega.$$

Mais d'après les formules de Chadu

$$u = \frac{b \sin \omega}{\sin A}, \qquad u' = \frac{c \sin \omega}{\sin A},$$

$$v = \frac{c \sin \omega}{\sin B}, \qquad v' = \frac{a \sin \omega}{\sin B},$$

$$w = \frac{a \sin \omega}{\sin C}, \qquad w' = \frac{b \sin \omega}{\sin C},$$

$$uvw = u'v'w' \frac{abc \sin^3 \omega}{\sin A . \sin B . \sin C} = 8R^3 \sin^3 \omega,$$

$$f = \sqrt[3]{uvw} = \sqrt[3]{u' v' w'}.$$

Autres solutions.

1° Par M. E. Lemoine.

Soit le point direct $\left(\dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}, \dfrac{a}{b}, \text{ coordonnées normales}\right)$, nous avons montré (*Mathesis*, 1885, p. 106), que l'on a

$$u = \frac{c^2 b}{n^2}, \qquad v = \frac{a^2 c}{n^2}, \qquad w = \frac{b^2 a}{n^2},$$

$$f = \frac{abc}{n^2},$$

$$(n^2 = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2})$$

et $$u' = \frac{b^2 c}{n^2}, \quad v' = \frac{c^2 a}{n^2}, \quad w' = \frac{a^2 b}{n^2}.$$

Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Le petit axe de cette ellipse a pour grandeur

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{R n^4},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Par M. G. Tzitzéica, à Bucarest.

On a

$$u = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin B}{\sin A}, \quad v = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin C}{\sin B}, \quad w = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin A}{\sin C},$$

$$u' = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin C}{\sin A}, \quad v' = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin A}{\sin B}, \quad w' = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}} \times \frac{\sin B}{\sin C},$$

et $\Sigma = \sin^2 B \sin^2 C + \sin^2 C \sin^2 A + \sin^2 A \sin^2 B,$

enfin (*) $$f = \frac{S}{R\sqrt{\Sigma}}$$

valeurs qui justifient les égalités données.

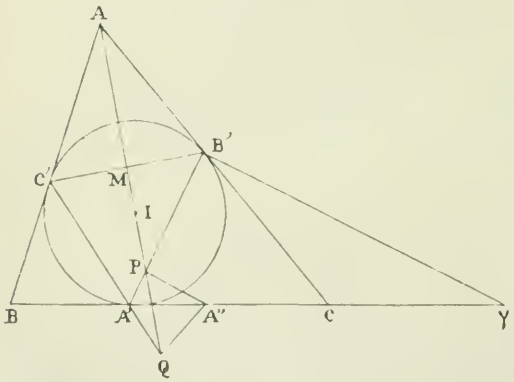
QUESTION 548

Solution par Mme Ve F. Prime.

On considère un triangle ABC, *rectangle* (**) *en* A, *et le cercle inscrit qui touche les côtés* BC, CA, AB, *respectivement aux points* A′, B′, C.

La bissectrice de l'angle BAC *coupe :* A′B′, *en* P; A′C′, *en* Q. *Démontrer que la circonférence circonscrite au triangle* PQA′ *a pour centre le milieu de* BC. (G. L.)

Considérons un triangle quelconque ABC.



1° *Si* A″ *est le point de contact du cercle* I_a *avec* BC, *la circonférence de diamètre* A′A″ *coupe* A′B′ *et* A′C′ *en des points* P *et* Q *qui sont en ligne droite avec le milieu* M *de* B′C′.

(*) Voyez *Kœhler*, pp. 184, 191.

(**) Il n'est pas nécessaire que l'angle en A soit droit, comme l'observe Mme Prime. M. Bernès nous avait aussi fait cette remarque. *(G. L.)*

En effet, la droite PA″ est parallèle à la bissectrice de C; menons B′γ parallèle à PA″,

$$A''\gamma = A''C + C\gamma = A''C + CA' = p - b + p - c = a \text{ et } (b > c).$$

$$\frac{A'P}{PB'} = \frac{A'A''}{A''\gamma} = \frac{b-c}{a}.$$

De même $$\frac{A'Q}{QC'} = -\frac{b-c}{a}.$$

2° PQ *est perpendiculaire sur* C′B′.

En effet $$\frac{A'P}{A'Q} = \frac{A'A''.\cos B'A'C}{A'A''.\cos A''A'Q} = \frac{\cos C'}{\cos B'}.$$

Il résulte de ces deux théorèmes que PQ est bissectrice de A.

Nota. — Solutions diverses par MM. Foucart, Droz-Farny, Tzitzéica. Davidoglou et Dhavernas.

QUESTION 528

Solution par M Vazou, professeur au collège de Falaise.

On considère un triangle ABC *variable; les sommets* B *et* C *sont fixes et le périmètre du triangle est constant. On construit, extérieurement aux côtés du triangle, des carrés sur les trois côtés, et on trace les droites passant par les sommets extérieurs, les plus voisins des carrés pris deux à deux. On forme ainsi un hexagone. Trouver le maximum et le minimum de son aire.*

(E.-N. Barisien.)

Changeons un peu les notations habituelles : désignons par $2c$ la distance BC; le périmètre du triangle étant constant, la somme des côtés AB et AC est invariable; représentons cette somme par $2a$. Le sommet A du triangle pourra se déplacer sur une ellipse ayant B et C pour foyers et pour grand axe $2a$. Il est facile de voir que la surface de l'hexagone égale 4 fois la surface du triangle ABC augmentée de la somme des carrés des côtés. Le théorème fondamental relatif à la médiane donne, O étant au milieu de BC,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2 + 2c^2.$$

Soit S l'aire de l'hexagone considéré. On a

$$S = 4.ABC + 2\overline{OA}^2 + 2c^2 + 4c^2 = 4.ABC + 2\overline{OA}^2 + 6c^2$$
$$= 4cy + 2\overline{OA}^2 + 6c^2.$$

Or $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$,

on a donc $S = 2(x^2 + y^2) + 4cy + 6c^2$.

Mais $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, d'où $x^2 = \dfrac{a^2(b^2 - y^2)}{b^2}$

et, par suite,

$$S = 2\left[\frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2} + y^2\right] + 4cy + 6c^2 = 2\left[\frac{a^2b^2 - c^2y^2}{b^2}\right] + 4cy + 6c^2.$$

Ainsi $\dfrac{5b^2}{2} = b^2(2b^2 + 4c^2) - (b^2 - cy)^2$.

Nous considérerons trois cas, suivant que l'on suppose

$$c > b, \qquad c = b, \qquad c < b.$$

1er Cas. $c > b$. y peut prendre successivement les valeurs o, $\dfrac{b^2}{c'} - b$; de o à $\dfrac{b^2}{c}$, $(b^2 - cy)^2$ diminue, passe par un minimum pour $y = \dfrac{b^2}{c}$, croît à partir de o, et pour $y = b$ prend la valeur $b^2(b - c)^2$.

Par suite, la surface a un minimum pour $y = o$, croît à partir de cette valeur, atteint un maximum pour $y = \dfrac{b^2}{c'}$, diminue ensuite et prend une valeur minimum pour $y = b$.

Calculons ces valeurs minima et maxima, nous aurons en les désignant respectivement par S_1, S_2, S_3:

Minimum $S_1 = 2(a^2 + 3c^2)$,
Maximum $S_2 = 4(a^2 + c^2)$,
Minimum $S_3 = 2(a^2 + 2c^2 + 2bc)$.

Comparaison des deux minima. Si

$$c < 2b, \qquad S_1 < S_3.$$
$$c = 2b, \qquad S_1 = S_3,$$
$$c > 2b, \qquad S_1 > S_3.$$

2e Cas. $c = b$. On a alors

$$\frac{Sb^2}{2} = 6b^4 - b^2(b - y)^2.$$

Valeur minimum de S pour $y = 0$, $S = 10b^2$,
» maximum » $y = b$, $S = 12b^2$.

3e Cas. $c < b$. L'aire S a toujours un minimum pour $y = 0$, et elle prend sa plus grande valeur pour $y = b$, y ne pouvant avoir une valeur supérieure à b.

Remarque. — On peut observer que S n'est jamais nul. En effet, on aurait alors

$$y = \frac{b\sqrt{2b^2 + 4c^2} + b^2}{c},$$

et cette valeur étant toujours supérieure à b, le point A qui lui correspond est imaginaire.

QUESTIONS PROPOSÉES

573. — Soient M et m les extrémites de deux diamètres conjugués d'une ellipse, de centre O.

On prend, sur la normale en M, deux points N et N′ tels que

$$MN = MN' = Om$$

et, sur la normale en m, deux points n et n' tels que

$$mn = mn' = OM.$$

On suppose que n, m sont du même côté par rapport au grand axe et que les points N et n sont aussi placés du même côté par rapport aux tangentes en M et m.

On propose d'établir les propriétés suivantes :

1° Les droites Nn', $N'n$ sont perpendiculaires; de plus, on a

$$Nn' = N'n = Mm\sqrt{2}.$$

2° Les droites Nn', $N'n$, et la parallèle à la corde Mm, menée par O, sont concourantes.

3° La somme des carrés des longueurs Nn et $N'n'$ est égale au carré de la diagonale du rectangle des axes.

4° Les droites qui joignent le point O au milieu K de Nn et au milieu K′ de $N'n'$ sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. *(E.-N. Barisien.)*

574. — M. de Longchamps a considéré (*) dans le triangle

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, p. 57.

ABC les trois cercles A(a), B(b), C(c) (*) et a montré, le premier, leur importance.

Démontrer que les rayons des cercles tangents à ces trois cercles et qui les laissent tous les trois à l'extérieur, ou tous les trois à l'intérieur, ont pour valeur, respectivement,

$$\rho' = \frac{2p(2R + r - p)}{2p - \delta}, \qquad \rho'' = \frac{2p(2R + r + p)}{2p + \delta}.$$

Les autres groupes de cercles tangents ont pour rayons

$$\rho'_a = \frac{2(p-a)[-2R + r_a + (p-a)]}{2(p-a) - \delta_a},$$

$$\rho''_a = \frac{2(p-a)[-2R + r_a - (p-a)]}{2(p-a) + \delta_a}, \qquad \text{etc.};$$

δ, δ_a ..., représentant les quantités $4R + r$, $4R - r_a$, etc.

(E. Lemoine.)

575. — On donne un triangle et le cercle qui lui est inscrit. On mène à ce cercle la tangente parallèle à l'un des côtés du triangle, et la tangente issue du milieu de ce côté. Démontrer que ces tangentes se coupent sur la droite qui joint les points où le cercle touche les deux autres côtés du triangle.

(Mannheim.)

576. — L'équation du quatrième degré en x

$$8c^2(x\cos\theta - c)$$
$$[2x^2(x\cos\theta - c)(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) - b^2x(x^2 - c^2)\cos\theta] = b^4(x^2 - c^2)^2$$

dans laquelle $\qquad b^2 = a^2 - c^2$,

a pour racines les valeurs suivantes :

$$x_1 = \frac{c(a+c)}{2c\cos\theta - (a-c)},$$

$$x_2 = \frac{c(a+c)}{2c\cos\theta + (a-c)},$$

$$x_3 = \frac{c(a-c)}{(a+c) - 2c\cos\theta},$$

$$x_4 = \frac{-c(a-c)}{(a+c) + 2c\cos\theta}.$$

(E.-N. Barisien.)

(*) Je désigne par M(R) un cercle de centre M et de rayon (R).

577. — On donne deux points A et B sur les côtés d'un angle O et l'on prend sur AO, BO des points A′, B′ tels que l'on ait toujours

$$\frac{AA'}{BB'} = K.$$

Lieu du point qui divise le segment A′B′ dans un rapport donné m. *(Verrière.)*

578. — Démontrer que dans un triangle on a toujours

$$4R - r_a > (p - a)\sqrt{3}.$$

(E. Lemoine.)

579. — On donne une circonférence de diamètre AB, une corde CD perpendiculaire en E sur ce diamètre, et un point M de la circonférence.

On achève le parallélogramme MECF ayant pour centre le point G et on projette A et B sur la diagonale MC en H et K. Démontrer que GH = GK = GE. *(Lucien Lévy.)*

580. — m_a désignant la médiane correspondant au côté a d'un triangle ABC et A′ le deuxième point de rencontre de cette médiane avec la circonférence circonscrite au triangle, on a la relation

$$3a^2 + 4m_a^2 = 12m_a GA',$$

(G désignant le centre de gravité du triangle.)

(E. Lauvernay.)

581. — Si AA′, BB′, CC′, diamètres de la circonférence circonscrite au triangle ABC, rencontrent les côtés correspondants BC, CA, AB en α, β, γ, la somme algébrique des trois rapports $\frac{\alpha A'}{A\alpha}, \frac{\beta B'}{B\beta}, \frac{\gamma C'}{C\gamma}$ est l'unité. *(E. Lauvernay.)*

582. — On mène une tangente quelconque au cercle inscrit à un triangle rectangle en A; si φ désigne l'angle de cette tangente avec le côté AB, on mène par A la droite AM telle que l'angle CAM soit égal à φ. Trouver le lieu du point M tel que la distance AM soit égale à la somme des distances des extrémités de l'hypoténuse BC à la tangente variable.

(E. Lauvernay.)

583. — En appelant, dans un triangle ABC, a, b, c, R, r, r_a, r_b, r_c les côtés, le rayon du cercle circonscrit et les rayons des cercles tangents aux trois côtés, démontrer que l'on a

$$a(b+c) = (r+r_a)(4R+r-r_a);$$

en déduire immédiatement

$$a(b-c) = (r_b-r_c)(4R-r_b-r_c).$$

(E. Lemoine.)

584. — Soit AB une corde d'une parabole P. On projette le pôle de AB sur AB en D, et sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, en E.

Démontrer que DE passe par le foyer de P. *(G. L.)*

585. — On considère deux cercles O et O'. Soit A le point de rencontre de deux tangentes communes d'espèce différente : on projette ce point en a sur OO'.

1° Le point a a même polaire par rapport aux cercles O et O'; cette polaire passe par deux autres points tels que A.

2° Le point a est à l'intersection de droites de contact sur O et O' de tangentes communes d'espèce différente.

(E. Foucart.)

586. — Le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre est sur la ligne des centres de ces deux circonférences.

(E. Foucart.)

587. — On considère une corde quelconque AB perpendiculaire à l'axe d'une parabole donnée P. Le cercle décrit sur AB comme diamètre enveloppe une parabole. Ce cercle rencontre la parabole P suivant une autre corde CD parallèle à AB : les deux cordes CD et AB sont toujours à une distance constante. *(E.-N. Barisien.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20954-10-94.

L'ARITHMÉTIQUE

AVEC LES FIGURES NÉGATIVES (*)

Le nombre des symboles ou figures qui, dans le système décimal, sont nécessaires à la représentation des nombres, est égal à *dix*. La notation que nous allons indiquer a pour but de réduire ce nombre et de ramener tous les calculs de l'arithmétique à des opérations sur des nombres exprimés au moyen des symboles

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

Les symboles

$$6, \quad 7, \quad 8, \quad 9,$$

qui donnent lieu aux difficultés matérielles des calculs, se trouvent ainsi éliminés. Cette transformation dans l'écriture des nombres aboutira, nous le croyons, à plus d'une heureuse conséquence.

En effet, on peut affirmer que la simplicité des démonstrations et la facilité des découvertes d'une science sont, presque toujours, en raison inverse du nombre des symboles qu'elle exige.

Quoi qu'il en soit, et pour le moment, nous voulons seulement montrer le principe de la transformation que nous proposons.

Convention. — Si, dans le système décimal, un nombre N est figuré par la notation :

$$abc,$$

on a :

$$N = a.10^2 + b.10 + c.$$

Nous convenons que l'écriture suivante :

$$a\bar{b}c$$

(*) Cette petite note fait partie des communications que nous avons présentées au Congrès de Besançon, l'an dernier. Elle a été publiée dans l'*Annuaire de l'Association française*. Mais, l'idée développée dans cette note est tout à fait élémentaire ; elle est susceptible, croyons-nous, d'applications intéressantes et nous croyons utile de la publier de nouveau, dans ce *Journal*. Elle trouvera peut-être quelque lecteur qui s'y intéressera et qui pourra l'exploiter, mieux que nous ne l'avons fait. *G. L.*

représentera un nombre égal à :

$$a.10^2 - b.10 + c.$$

En général, le signe — placé au-dessus d'un chiffre k, rappellera que, dans le nombre *développé* (*), la partie correspondante $k.10^\alpha$ (α représentant, bien entendu, le nombre des chiffres qui suivent k) doit être prise avec le signe —.

Théorème. — *Avec l'emploi des figures négatives, tout nombre peut, dans le système décimal, être représenté avec les seuls signes :*

(1) 0, 1, 1, 3, 4, 5.

Considérons un nombre :

$$N = abcde.$$

Supposons, par exemple, que le chiffre c soit supérieur à 5 et posons

$$10 - c = c',$$

c' étant, par conséquent, l'un des chiffres de la suite (1). Nous avons :

$$N = abcde + c.10^3,$$

ou : $$N = ab\bar{c}'de + (c + c')10^3,$$

ou enfin : $$N = ab\bar{c}'de + 10^4.$$

Si b n'est pas égal à 9, $(b + 1)$ représente, dans l'égalité précédente, le second chiffre. Si $b = 9$, $(b + 1)10^4 = 10^5$; $(a + 1)$ sera le premier chiffre du nombre N. En opérant ainsi, successivement, pour les chiffres supérieurs à 5, on transformera la représentation arithmétique ordinaire de N en une autre ne renfermant que les symboles inférieurs à 6.

Cette transformation se fait d'ailleurs instantanément, dans la pratique. Pour le montrer, prenons un exemple.

Le nombre N, dans l'écriture ordinaire, étant représenté par

$$N = 378.162.748;$$

dans l'écriture que nous proposons, on aura :

$$N = 4\bar{2}\bar{2}.243.35\bar{2}.$$

La transformation se fait par l'application d'une règle pratique fort simple, mais sur laquelle nous devons insister un

(*) Lorsqu'un nombre est représenté par le symbole

$$abc\ldots \qquad (n \text{ chiffres})$$

nous dirons, pour abréger le langage, que

$$a.10^n + b.10^{n-1} + c\ 10^{n-2} + \ldots$$

est le *nombre développé*.

peu pour montrer, qu'en effet, ce changement peut être effectué sans effort (*).

On prend le complément de 8 à 10; c'est 2. On écrit $\bar{2}$, pour le dernier chiffre et on reporte 1 au chiffre précédent. Si, après cette augmentation, le second chiffre ne dépasse pas 5, on le conserve et on continue la transformation du nombre considéré, en allant toujours de droite à gauche. Lorsqu'on rencontre le chiffre 8 qui est au troisième rang, on le remplace par $\bar{2}$; le chiffre 7, qui occupe le second rang, doit alors être remplacé par 8, ou par $\bar{2}$, en mettant 4 au lieu de 3, au premier rang. Il suffit de réfléchir un instant à cette opération pour comprendre combien elle est d'une réalisation facile; mais, si l'on doute de la chose, la conviction s'imposera quand on aura fait seulement deux ou trois transformations de cette nature.

Les opérations arithmétiques dans la nouvelle manière. — Nous avons à nous demander, avant d'aller plus loin, comment se modifient les règles ordinaires du calcul arithmétique, quand on écrit les nombres comme nous le proposons ici.

D'une façon générale, on peut dire que ces règles subsistent, avec cette simple modification que, dans les applications, on suivra *la règle des signes* (**).

Voici, pour citer un premier exemple, une addition faite

(*) Dans cet ordre d'idées *(transformation dans la représentation d'un nombre donné)*, nous signalerons ici une Note de M. Collignon publiée dans la chronique des *Annales des Ponts et Chaussées* (avril 1893, p. 790), intitulée : UNE REMARQUE SUR LA MULTIPLICATION.

Le point de départ de cette note est tout différent de celui que nous venons d'exposer et il peut, je crois, se résumer ainsi :

Un nombre N *étant donné, quelconque d'ailleurs, on peut toujours le représenter par une somme ou une différence de nombres* A, B, C, D, *en nombre égal à* 4, *tout au plus; ces nombres étant exprimés par les seuls symboles* 0, 1, 2, 5.

(**) Cette règle des signes et toute la théorie des nombres dits *négatifs* se trouvent, habituellement, exposées au commencement de l'algèbre. Nous ne voyons, pour notre part, que des avantages à la placer en arithmétique, lorsqu'on s'adresse à ceux qui doivent s'expliquer la partie théorique de cette science. Quant aux autres, à ceux qui se bornent à la partie pratique, il ne leur sera pas difficile d'ajouter au bagage ordinaire une règle de plus; surtout une règle aussi simple.

dans le système en question :

$$\begin{aligned} N &= 765.294 = 1.2\bar{4}\bar{5}.\bar{3}\bar{1}4 \\ N' &= 378.572 = \bar{4}\bar{2}1.\bar{4}\bar{3}2 \\ N'' &= 257.829 = \bar{3}\bar{4}\bar{2}.\bar{2}\bar{3}1 \\ \hline N + N' + N'' &= 1.401.695 = 1.402.\bar{3}\bar{1}5 \end{aligned}$$

Pour l'addition, même pour celle qui est relative à de grands nombres, la simplification qui résulterait de l'emploi de la méthode que nous exposons est, nous l'accordons, assez minime. Elle constitue pourtant, tout au moins, une vérification de calcul pour ceux qui auront pris l'habitude des figures négatives. Mais, en effectuant quelques opérations, on verra bientôt combien l'usage des chiffres affectés du signe — facilite le calcul. Et, en effet, les nombres obtenus par l'addition des chiffres renfermés dans une même colonne, au lieu d'aller en augmentant toujours, ce qui est inévitable avec l'écriture ordinaire, se trouvent être notablement plus simples, en bénéficiant du mélange des chiffres positifs et des chiffres négatifs. La justesse de cette observation est facile à vérifier sur le calcul précédent.

Prenons maintenant un exemple de multiplication et soit proposé de multiplier l'un par l'autre les deux nombres :

$$\begin{aligned} N &= 289.764 = 3\bar{1}0.\bar{2}\bar{4}4 \\ N' &= 182.879 = 2\bar{2}3.1\bar{2}\bar{1} \end{aligned}$$

La multiplication faite par la voie ordinaire donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{r} 289764 \\ 182879 \\ \hline 2607876 \\ 2028348 \\ 2318112 \\ 579528 \\ 2318112 \\ 289764 \\ \hline 52991750556 \end{array}$$

Pour l'autre méthode, le calcul se présente sous cette forme :

$$
\begin{array}{r}
3\bar{1}0\bar{2}\bar{4}\bar{4} \\
2\bar{2}3\bar{1}\bar{2}\bar{1} \\
\hline
\bar{3}10\bar{2}4\bar{4} \\
\bar{6}20\bar{4}\bar{8}\bar{8} \\
\bar{3}10\bar{2}4\bar{4} \\
9\bar{3}0\bar{7}\bar{1}2 \\
\bar{6}20\bar{4}\bar{8}\bar{8} \\
6\bar{2}0\bar{4}\bar{8}8 \\
\hline
5\bar{3}0\bar{1}2\bar{3}\bar{5}\bar{1}\bar{4}\bar{4}\bar{4}
\end{array}
$$

Dans le courant du calcul, pour éviter certaines complications, qui disparaîtraient d'ailleurs avec la pratique, nous avons fait usage des symboles 6, 7... ; mais en faisant l'addition des résultats partiels, il faut revenir à la notation adoptée.

La preuve par 9 s'applique à l'opération précédente, en suivant la marche adoptée par les nombres écrits à la manière ordinaire. Le calcul se trouve, au contraire, simplifié ; la somme des chiffres s'obtenant plus facilement, nous l'avons déjà observé, quand quelques-uns d'entre eux sont négatifs.

Voici un exemple d'une division effectuée successivement par les deux méthodes :

$$
\begin{array}{r|l}
293964 & 374 \\
\cline{2-2}
3216 & 786 \\
\cline{1-1}
2244 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3\bar{1}40\bar{4}\bar{4} & 4\bar{3}4 \\
\cline{2-2}
4\bar{3}4 & \bar{2}\bar{1}\bar{4} \\
\cline{1-1}
\bar{1}200 & \\
\bar{8}6\bar{8} & \\
\cline{1-1}
\bar{1}5\bar{2}\bar{4} & \\
\bar{4}\bar{3}\bar{4} & \\
\cline{1-1}
\bar{2}50\bar{4} & \\
\bar{1}\bar{5}1\bar{6} & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Pour cette opération, le manque d'habitude ne permettant pas de faire, à la fois, la multiplication du multiplicateur par les chiffres successifs du quotient et la soustraction correspondante, les opérations sont plus longues. Mais nous pensons que la pratique ferait facilement disparaître cette difficulté. Il y a, dans tous les cas, au système que nous préconisons, un avantage non contestable et qui résulte de ce fait que, les calculs ne portant pas sur les symboles 6, 7, 8, 9, le chiffre du quotient se détermine, presque toujours, sans le tâtonnement que l'on rencontre si fréquemment dans l'opération ordinaire.

Comme dernier exemple, proposons-nous d'extraire la racine carrée de

$$614656$$

On a : $$614656 = \overline{1}\,\overline{4}\,1\,5\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{4}$$

Le calcul, disposé conformément à la pratique ordinaire, donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{\overline{1}\,\overline{4}\,1\,5\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{4}} & \overline{1}\,2\,\overline{2}\,4 \\
\hline
\quad \overline{4}^{\,1} & \overline{2}\,\overline{2} \times \overline{2} \\
\hline
\quad \overline{4}\,\overline{4} & \overline{2}\,\overline{4}\,\overline{2} \times \overline{2} \\
\hline
\quad \overline{3}\,5\,\overline{3} & \overline{2}\,\overline{4}\,\overline{4}\,4 \times 4 \\
\hline
\quad \overline{3}\,\overline{2}\,4 & \\
\hline
\quad \overline{1}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{4} & \\
\quad \overline{1}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{4}\,\overline{4} & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

La racine est égale à $\overline{1}\,2\,\overline{2}\,4$, ou à 784, comme on le vérifie facilement. *G. L.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

350. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$x^2 - m(m\alpha^2 + 2)y^2 + 2m = 0.$$

On obtient toutes les solutions par les suites récurrentes :

$x_1 = m\alpha$, $\quad x_2 = 2m^2\alpha^3 + 3m\alpha$, $\quad x_3 = 4m^3\alpha^5 + 10m^2\alpha^3 + 5m\alpha$,

$y_1 = 1$, $\quad y_2 = 2m\alpha^2 + 1$, $\quad y_3 = 4m^2\alpha^4 + 6m\alpha^2 + 1$,

. . . . . .

$$x_n = 2(m\alpha^2 + 1)x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_n = 2(m\alpha^2 + 1)y_{n-1} - y_{n-2}.$$

On peut ajouter que x_n et y_n, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles :

$$m(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2\frac{x_n}{m}}{dm^2} + (2m\alpha^2 + 3)\frac{d\frac{x_n}{m}}{dm} - n(n-1)\alpha^2\frac{x_n}{m} = 0,$$
$$m(m\alpha^2 + 2)\frac{d^2y_n}{dm^2} + (2m\alpha^2 + 1)\frac{dy_n}{dm} - n(n-1)\alpha^2 y_n = 0,$$

qui permettent d'obtenir aisément l'expression générale de x_n, y_n, en fonction de m, α, n.

351. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$x^2 - m(m\alpha^2 + 1)y^2 = 1.$$

On a toutes les solutions par les suites récurrentes :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2m\alpha^2 + 1, \quad x^2 = 8m^2\alpha^4 + 8m\alpha^2 + 1,$$
$$x_3 = 32m^3\alpha^6 + 48m^2\alpha^4 + 18m\alpha^2 + 1, \ldots x_n = 2(2m\alpha^2 + 1)x_{n-1} - x_{n-2}.$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 2\alpha, \quad y_2 = 8m\alpha^3 + 4\alpha$$
$$y_3 = 32m^2\alpha^5 + 32m\alpha^3 + 6\alpha \ldots y_n = 2(2m\alpha^2 + 1)y_{n-1} - y_{n-2}.$$

Considérés comme fonctions de m, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles :

$$2m(m\alpha^2 + 1)\frac{d^2x_n}{dm^2} + (2m\alpha^2 + 1)\frac{dx_n}{dm} - 2n^2\alpha^2 x_n = 0.$$
$$2m(m\alpha^2 + 1)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3(2m\alpha^2 + 1)\frac{dy_n}{dm} - 2(n^2 - 1)\alpha^2 y_n = 0:$$

On en déduit aisément les expressions de x_n et de y_n.

352. — *Résoudre en nombres entiers l'équation :*

$$x^2 - m(m\alpha^2 + 1)y^2 + m = 0.$$

On a toutes les solutions par les suites récurrentes :

$$x_1 = m\alpha \quad x^2 = 4m^2\alpha^3 + 3m\alpha \quad x_3 = 16m^3\alpha^5 + 20m^2\alpha^3 + 5m\alpha,$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = 4m\alpha^2 + 1, \quad y_3 = 16m^2\alpha^4 + 12m\alpha^2 + 1,$$

et en général :

$$x_n = 2(2m\alpha^2 + 1)x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_n = 2(2m\alpha^2 + 1)y_{n-1} - y_{n-2}.$$

Considérés comme fonctions de m, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles :

$$m(m\alpha^2 + 1)\frac{d^2\frac{x_n}{m}}{dm^2} + \frac{4m\alpha^2 + 3}{2}\frac{d\frac{x_n}{m}}{dm} - n(n-1)\alpha^2\frac{x_n}{m} = 0.$$
$$m(m\alpha^2 + 1)\frac{d^2y_n}{dm^2} + \frac{4m\alpha^2 + 1}{2}\frac{dy_n}{dm} - n(n-1)\alpha^2 y_n = 0,$$

qui donnent le développement général de x_n et y_n.

353. — *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^2 - m(9m - 2)y^2 = 1.$$

On obtient toutes les solutions par les suites récurrentes:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 9m - 1, \quad x_2 = 162m^2 - 36m + 1, \quad \ldots$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 6(9m - 1), \quad \ldots$$

et, en général,

$$x_n = 2(9m - 1)x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_n = 2(9m - 1)y_{n-1} - y_{n-2},$$

x_n et y_n, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles:

$$m(9m - 2)\frac{d^2x_n}{dm^2} + (9m - 1)\frac{dx_n}{dm} - 9n^2x_n = 0.$$

$$m(9m - 2)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3(9m - 1)\frac{dy_n}{dm} - 9(n^2 - 1)y_n = 0.$$

qui permettent d'obtenir le développement en série de x_n et y_n.

354. — *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^2 - m(\alpha^2 m - 2)y^2 = 1.$$

Cette équation généralise la précédente. On obtient toutes les solutions au moyen des suites récurrentes:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \alpha^2 m - 1, \quad x_2 = (\alpha^2 m - 1)(2\alpha^2 m - 2) - 1,$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = \alpha, \quad y_2 = \alpha(2\alpha^2 m - 2).$$

En général:

$$x_n = 2(\alpha^2 m - 1)x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_n = 2(\alpha^2 m - 1)y_{n-1} - y_{n-2}.$$

Considérés comme fonctions de m, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles:

$$m(\alpha^2 m - 2)\frac{d^2x_m}{dm^2} + (\alpha^2 m - 1)\frac{dx_n}{dm} - \alpha^2 n^2 x_n = 0,$$

$$m(\alpha^2 m - 2)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3(\alpha^2 m - 1)\frac{dy_n}{dm} - \alpha^2(n^2 - 1)y_n = 0.$$

Considérés comme fonctions de α, x_n et y_n satisfont aux équations différentielles:

$$(\alpha m^2 - 2)\frac{d^2x_n}{d\alpha^2} + m\alpha\frac{dx_n}{d\alpha} - 4mn^2x_n = 1.$$

$$(\alpha^2 m - 2)\frac{d^2y_n}{d\alpha^2} + 3m\alpha\frac{dy_n}{d\alpha} - m(4n^2 - 1)y_n = 0.$$

De ces équations différentielles, on peut tirer le développement en série de x_n et y_n.

355. — *Résoudre en nombres entiers les deux équations:*

$$x^2 - (25m^2 - 14m + 2)y^2 = +1,$$
$$x^2 - (25m^2 - 14m + 2)y^2 = -1;$$

(m *entier positif donné.*)

Si on considère les suites:

$$x_0 = 1 \quad x_1 = 25m - 7, \quad x_2 = 1250m^2 - 700m + 99 \ldots$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 250m - 70 \quad \ldots$$
$$x_n = 2(25m - 7)x_{n-1} + x_{n-2},$$
$$2(25m - 7)y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Les équations proposées sont complètement résolues; la première, par les valeurs de x_n et y_n d'indice pair; la seconde, par les valeurs des mêmes quantités d'indice impair.

x_n et y_n, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles :

$$(25m^2 - 14m + 2)\frac{d^2x_m}{dm^2} + (25m - 7)\frac{dx_n}{dm} - 25n^2x_n = 0.$$

$$(25m^2 - 14m + 2)\frac{d^2y_n}{dm^2} + 3(25m - 7)\frac{dy_n}{dm} - 25(n^2 - 1)y_n = 0.$$

On peut en déduire le développement en série de x_n et y_n.

Remarque. — On peut former une infinité d'équations analogues aux précédentes, c'est-à-dire de la forme : $x^2 - Ay^2 = \pm k$, où A est une fonction, convenablement choisie, du second degré d'un paramètre m; ces équations sont complètement résolues par des polynômes entiers en m, et données par une même formule de récurrence; ces polynômes satisfont d'ailleurs à des équations différentielles du second ordre, analogues à celles que nous avons trouvées. Le paramètre A ayant été convenablement choisi, k n'est pas arbitraire; c'est une quantité numérique, ou un binôme du premier degré en m, susceptible d'un nombre restreint de formes.

Pour les équations de Pell :

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1,$$

Pour une certaine valeur de A, les équations différentielles auxquelles satisfont x_n et y_n ont pour coefficient de x''_n et y''_n, la quantité A et pour coefficients de x'_n, y'_n, respectivement, $\frac{1}{2}A'_m$, $\frac{3}{2}A'_m$.

BIBLIOGRAPHIE

Nous signalons à l'attention de nos lecteurs les ouvrages suivants, que nous regrettons de ne pouvoir analyser, faute de place.

1° **Trigonométrie** à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire (*), par L. Gérard, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon.

2° **Théories météorologiques et Prévision du temps**, par E. Guilhon, lieutenant de vaisseau. — Gr. in-8°, avec 29 figures et tables; 1894. 2 fr. 50 c.

(*) On lit sur la couverture de cet ouvrage, après le titre que nous venons de reproduire : « *classique*, 2e partie, 2e série; *moderne*, 2e partie, 2e et 3e séries ». Ceux qui peuvent se reconnaître au milieu de ces *baccalauréats*, de ces *parties* et de ces *séries*, et qui arrivent à les classer, sont bien heureux ! A quel baccalauréat désirez-vous être inscrit? demandait-on un jour à un candidat. Je ne sais pas, répondit celui-ci. Le fait est que le choix ne paraît pas facile à faire, dans cette variété qui, sans doute, et bien qu'on n'en saisisse pas immédiatement la raison, intéresse le progrès des études.

G. L.

Comme l'indique le titre, l'auteur a divisé son livre en deux parties distinctes : la théorie et la pratique.

Dans la première, il établit avec une saisissante clarté les lois météorologiques qui régissent notre atmosphère et déterminent les phénomènes que nous observons.

« J'ai puisé, dit-il, à droite et à gauche, surtout dans mes notes et souvenirs de marin, et, m'inspirant de mes propres idées, j'ai édifié un système qui m'a paru complet le jour où j'ai pu en trouver la vérification dans tous les faits qui se passent à la surface de la terre. »

La seconde partie contient l'exposé d'une nouvelle méthode de prévision du temps.

« Cette méthode, écrit l'auteur dans sa préface, est basée sur des principes que mes statistiques ont mis en évidence ; j'en ai vérifié l'exactitude par de très nombreuses observations faites dans notre premier observatoire météorologique. »

Un chapitre spécial indique les précautions à prendre dans l'emploi des instruments.

Des tables, dressées d'après les dernières formules admises, permettent de réduire facilement les observations.

Ce livre est abondant en idées nouvelles qui lui donnent une réelle valeur scientifique. Sa lecture est facile et sa pratique à la portée de tous ceux qui voudront apprendre à prévoir le temps.

Les marins seront certainement les premiers à apprécier cet ouvrage qui contribuera à assurer la sécurité de la navigation.

3° **Trattato di Aritmetica razionale**, à l'usage des gymnases supérieurs, des écoles secondaires supérieures et des instituts militaires, par Giovanni Garbieri, professeur à l'Université de Genève (Padoue, Francesco Sachetto, éditeur); prix : 2 francs.

C'est un ouvrage élémentaire, mais très complet ; l'exposition est bien ordonnée et il renferme de nombreux exercices.

BACCALAURÉATS

Académie d'Aix (Faculté de Marseille) (Juillet 1894).

I. — 1° Dans un carré ABCD, trouver un point M tel que, si l'on enlève au carré le triangle AMB, le centre de gravité de la partie restante se trouve au point M.

2° Trouver la valeur minimum de $\operatorname{tg}^2\alpha$ lorsque α varie de 0° à 45°.

II. — 1° On donne dans un plan trois droites OA, OB, OC, issues d'un même point O. La droite OA est la bissectrice de l'angle BOC qui est égal à 120°. On désigne par F une force donnée et par a un angle donné. On applique suivant OA une force égale à $F\cos a$, suivant OB une force égale à $F\cos a - \sqrt{3}\sin a$, et suivant OC une force égale à $F(\cos a + \sqrt{3}\sin a)$. Trouver la grandeur de la résultante de ces trois forces et l'angle que cette résultante fait avec OA.

2° Dans un cercle de rayon R on donne deux cordes AB, AC issues d'un même point A ; on demande de calculer la corde BC. Calculer en

particulier cette corde BC lorsque le rayon du cercle est égal à 65 mètres et que les cordes AB et AC sont respectivement égales à 50 et 78 mètres.

III. — 1° Connaissant la trace horizontale $p\pi$ d'un plan et l'angle que les deux traces forment entre elles dans l'espace, construire la trace verticale. Tracer l'épure à main levée et en donner l'explication.

2° Les variables x et y étant liées par les relations :

$$x + y = a, \qquad x^4 + y^4 = b,$$

calculer xy en fonction de a et de b. En déduire les valeurs de x et y qui rendent $x^4 + y^4$ minimum quand $x + y$ est donné.

Académie d'Alger.

I. — On considère tous les segments de droite BC qui, s'appuyant sur les deux côtés d'un angle donné XAY, ont une longueur égale à l; on demande quel est celui qui, en tournant autour de AX, engendre un cône de surface latérale donnée. Discuter la solution trouvée et construire celui des segments BC qui engendre la plus grande surface. On prendra pour inconnues $AB = x$, $AC = y$.

II. — 1° Étant donnés le côté $CD = d$ et la hauteur $AB = h$ d'un tronc de cône, déterminer les rayons $AD = x$ et $BC = y$, sachant que la surface latérale de ce cône est égale à la somme de celle de ses deux bases. Discuter la solution trouvée.

2° Trouver un angle dont la tangente ait la même valeur que le cosinus. La question admet-elle plusieurs solutions?

III. — On donne deux circonférences O, O′ dont les rayons sont R, R et la distance des centres D. On considère une droite AX perpendiculaire à OO′ et à une distance a du centre O. Trouver entre quelles limites doit être compris le rapport a/A pour qu'il existe sur AX un point M d'où les deux circonférences soient vues sous des angles égaux.

Montrer que le problème proposé revient à trouver sur AX un point tel que le rapport de ses distances à deux points fixes soit donné, et déduire de cette remarque une solution géométrique du problème.

Questions à choisir : (a) Résultante de deux forces parallèles et de sens contraires ; *(b)* Théorème du moment de la résultante de deux forces concourantes par rapport à un point de leur plan ; *(c)* Equilibre de la poulie mobile.

IV. — 1° Étant donné un triangle rectangle AOB dont les côtés de l'angle droit sont $OA = a$, $OB = b$, trouver sur l'hypoténuse AB un point M tel que si on abaisse de ce point des perpendiculaires MP et MQ sur les côtés OA et OB, la surface totale du cylindre engendré par le rectangle MPOQ tournant autour de OB ait une valeur donnée — Discussion de la solution.

2° *Questions à choisir : (a)* Angle d'un plan vertical avec un plan parallèle à la ligne de terre ; *(b)* Intersection d'une droite donnée par ses projections avec une sphère de rayon donné ayant son centre sur la ligne de terre ; *(c)* Construire le plan bissecteur d'un dièdre dont les faces sont l'une parallèle à la ligne de terre, et l'autre perpendiculaire à cette même ligne.

V. — 1° On donne la hauteur h d'un tronc de cône ainsi que la somme

a des rayons x et y de ses deux bases et on demande de calculer les valeurs de ces rayons, sachant que le volume du tronc est $1/3\pi h$. — Discussion.

2° Dans un lieu dont la latitude est de 35°, calculer les limites entre lesquelles varie la longueur de l'ombre d'une tour de 25 mètres.

Académie de Paris (Octobre 1894).

1° Une sphère de rayon R est coupée par deux plans parallèles AB et CD suivant deux cercles ayant respectivement pour centres les points E et F.

On demande de calculer la distance $x =$ OE du centre de la sphère au plan AB, et la distance $y =$ OF du centre de la sphère au plan CD, connaissant la surface S de la zone ABCD et le volume V du segment sphérique ABCD.

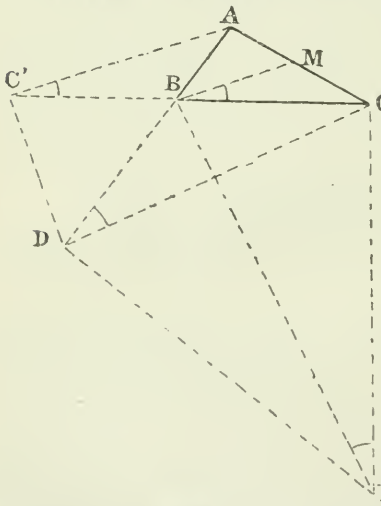
2° Somme des termes d'une progression géométrique. Étudier le cas où le nombre des termes croît indéfiniment.

QUESTION 550

Solution par Mme Ve F. Prime.

On prolonge le côté AB *d'un triangle* ABC *d'une longueur* BD *troisième proportionnelle à* BC *et* BA (*); *puis on mène* DE *perpendiculaire sur* AB, CE *perpendiculaire sur* BC. *Démontrer que* BE *est perpendiculaire sur la médiane issue de* B.

(Lucien Lévy.)



Prolongeons CB de BC' CB ; C'A est parallèle à la médiane BM et les quadrilatères inscriptibles ACDC', BDEC donnent

$$\widehat{MBC} = \widehat{AC'C} = \widehat{ADC} = \widehat{CEB}.$$

Il en résulte que BM est une tangente à la circonférence BCED et comme BE est diamètre de cette circonférence, BM est perpendiculaire sur BE.

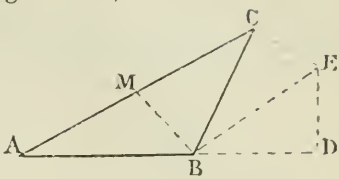
(*) Il vaut mieux dire, comme nous l'a fait remarquer M. Bernès, *à* BA *et* BC ; M. Bernès observe à ce propos que si la même longueur était portée en sens inverse, BE serait perpendiculaire sur AC.

Autrement (*). — Dans le triangle ABC, on a :

(1) $2.\overline{MB}^2+2.\overline{AM}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$;

de même dans le triangle CAE;

$$(2)\begin{cases} 2\overline{ME}^2+2\overline{AM}^2=\overline{CE}^2+\overline{AE}^2 \\ =\overline{BE}^2-\overline{BC}^2+\overline{AD}^2\overline{BE}^2-\overline{BD}^2 \\ =2\overline{BE}^2-\overline{BC}^2+\overline{AB}^2+2AB.BD; \end{cases}$$



retranchons (1) et (2), il vient :

$$2[\overline{ME}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{BE}^2] = 2AB.BD - 2\overline{BC}^2.$$

Le second membre étant nul par hypothèse, on a :

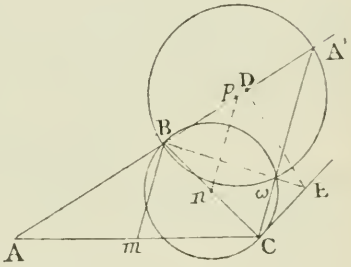
$$\overline{ME}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BE}^2.$$

Autrement. — Prenons sur AB

$$A'B = AB;$$

on a $$\overline{BC}^2 = BA'.BD;$$

les cercles ayant pour diamètres BA′ et BC sont dès lors les transformées des droites DE et CE, B étant le centre d'inversion et $\overline{BC}^2$ le module; ces cercles se coupent en ω situé sur BE; soient m, n, p, les milieux de AC, BC, BA′; Bm est parallèle à CA′, donc Bm, pn sont parallèles; Bm est donc, comme pn, perpendiculaire sur BωE.



Nota. — Nous avons reçu deux autres solutions trigonométriques : l'une, de M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy; l'autre, de M. Foucart, élève au lycée Michelet.

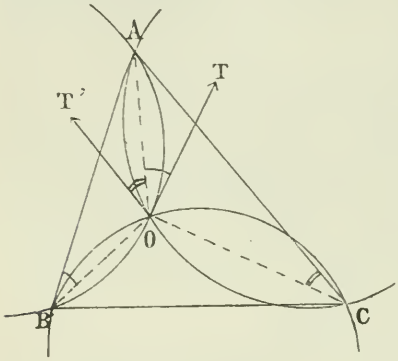
QUESTION 552

Solution par A. Droz-Farny.

Trouver dans le plan d'un triangle ABC *un point* O *tel que les trois circonférences* AOB, BOC, COA *se coupent mutuellement sous des angles donnés.* (M. Fouché.)

(*) Cette solution est de M. Antoine Davidoglou, élève au lycée Codreano, à Berlad (Roumanie); la suivante, de M. J. Dhavernas, élève au lycée Michelet.

On sait que lorsque deux courbes se coupent sous un certain angle, les courbes inverses se coupent sous le même angle. En transformant toute la figure en prenant le point O comme pôle d'inversion, les inverses des trois circonférences sont trois droites; d'où le théorème :



La somme des angles que forment les circonférences précédentes deux à deux est égale à deux angles droits.

Soient données maintenant deux droites BA et AC et cherchons le lieu géométrique des points O tels que les circonférences OAB et OAC se coupent sous un angle α. Menons en O les tangentes OT et OT′ aux deux circonférences précédentes. (O est supposé situé dans l'angle A.)

$$\text{Angle } AOT = OBA,$$
$$\text{Angle } AOT' = OCA,$$

et, par conséquent, l'angle $BOC = 360^\circ - A - \alpha = \text{constant}$.

Le lieu de O est donc un arc de cercle passant par les points B et C.

Le problème proposé revient donc à rechercher les points d'intersection de circonférences bien déterminées.

Nota. — Solutions analogues par Mme Ve F. Prime et M. A. Davidoglou, élève au lycée de Berlad (Roumanie).

QUESTION 553

Solution par M. Tzitzéica, élève à l'École normale de Bucharest.

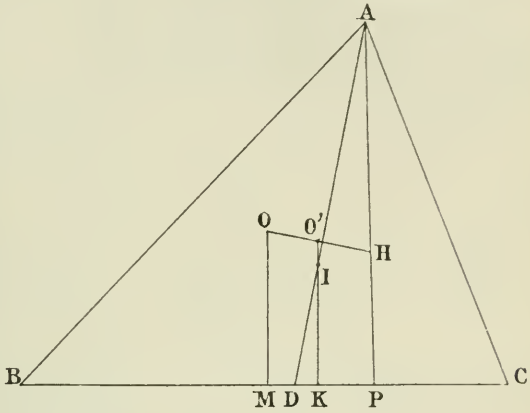
Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, la tangente commune au cercle inscrit et au cercle des neuf points est parallèle au côté moyen. (E. Foucart.)

Soient O, I, O′, H, les centres du cercle circonscrit, du cercle inscrit, du cercle des neuf points et des hauteurs du

triangle ABC. On a les relations

(1) $2a = b + c$ ou $a - b = c - a$.

Il suffit de montrer que IO′ est perpendiculaire sur BC. Soient K la projection de I sur BC, M celle de O et L celle de H. Si O′I est perpendiculaire sur BD, HP, O′IK, OM sont parallèles, et parce que O′ est au milieu de OH, K sera au milieu de MP. Tout consiste à démontrer l'égalité



(2) $KM = KP$.

Soit D le point où AI rencontre BC, on a

(3) $$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB + AC}{BC} = 2 \quad \text{en vertu de (1)}$$

d'où $$\frac{AD}{ID} = \frac{AP}{IK} = \frac{DP}{DK} = 3,$$

donc $$DP = 3DK$$

et $$KP = 2KD$$

mais $$KD = BD - BK = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2}$$

$$KM = BM - BK = \frac{a}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - c}{2} = \frac{b - (r^2 a - b)}{2} = b - a.$$

Ainsi, $KP = KM = b - a$. Donc, etc...

Remarque. — On a encore

$$h_a = r_a = 3r$$

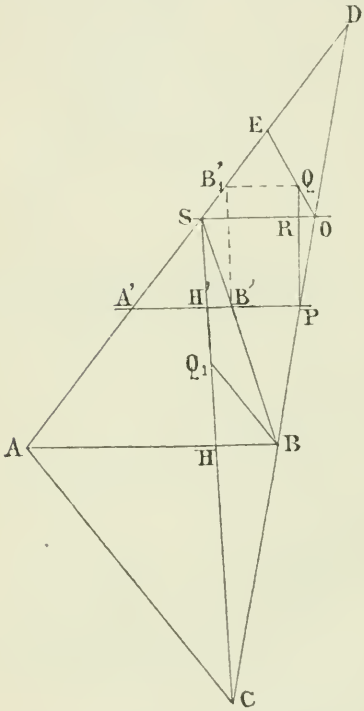
$$KD = DM = \frac{b - a}{2}. \quad (^*)$$

(*) M. Foucart, qui a proposé cette question, nous fait observer que la solution analytique est immédiate. La tangente commune au cercle in-

QUESTION 554

Solution par M. Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

On donne un triangle ASB *et une droite* SH *qui rencontre* AB *en* H. *Par* B *on trace une sécante arbitraire qui rencontre* SH *en* C, SA *en* D *et une parallèle* A'B' *à* AB *en* P. *Sur une parallèle menée de* P *à* SH *on prend un point* Q *tel que* PQ *soit divisé par la parallèle de* S *à* AB *dans le rapport* $\frac{HA}{HB}$. *Démontrer:*



1° Que la droite QD *divise* CA *dans un rapport indépendant de* H *et de la sécante* BC;

2° Que, lorsque la sécante BC *varie,* A'B' *et* H *restant fixes, le lieu de* Q *est une parallèle à* BC;

3° Que, lorsque, BC *et* A'B' *restant fixes,* H *varie, le lieu de* Q *est une parallèle à* SA;

4° Que lorsque, BC *et* H *restant fixes,* A'B' *varie, le lieu de* Q *est une droite parallèle à* AC.

(Bernès).

---

scrit et au cercle des neuf points a, en effet, comme on sait, pour équation en coordonnées normales:

$$\Sigma \frac{ax}{b-c} = 0.$$

La condition pour cette droite d'être parallèle au côté $y = 0$, par exemple, s'exprime par

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b-c} & \frac{b}{c-a} & \frac{c}{a-b} \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

d'où $2b = a + c$. Donc, etc...

(Cette question comprend la question 530.)

Soient R et O les points d'intersection de SR parallèle à AB respectivement avec PQ et BC. Si par B on mène BQ_1 parallèle à OQ qui coupe SH en Q_1, on a

$$\frac{HC}{HQ_1} = \frac{RP}{RQ} = \frac{HA}{BH}.$$

L'égalité des termes extrêmes montre que BQ_1 et par suite OQ est parallèle à OC.

Si SH coupe A'B' en H', on a de suite

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{H'A'}{H'B'}$$

d'où $$\frac{RP}{RP + RQ} = \frac{H'A'}{H'A' + H'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{RP}{H'A'} = \frac{PQ}{A'B'}$$

ou encore $$\frac{S'H'}{H'A'} = \frac{PQ}{A'B'}.$$

Cette égalité montre que si on mène QB_1' équipollente à PB', B_1' est sur SA; alors

$$\frac{EQ}{EO} = \frac{QB_1'}{SO} = \frac{PB'}{SO} = \frac{BB'}{BS} = \text{const.}$$

et comme AC et OQ sont parallèles, QD coupe AC en un point M, tel que

$$\frac{AM}{AC} = \frac{EQ}{EO} = \text{const.}$$

Par $$\frac{MA}{MC} = \text{constante.}$$

2° $\frac{RP}{RQ}$ restant constant et RP aussi, PQ est constant et comme PQ a une direction fixe, le lieu de Q est une parallèle à BC.

3° Dans les conditions considérées, le lieu de B_1' étant SA, et $QB_1' = PB'$ étant constant, le lieu de Q est une parallèle à SA, la distance de cette droite à SA suivant AB étant égale à PB'.

4° AC est fixe, le point O aussi; on sait que OQ est parallèle à AC; donc le lieu de Q est la parallèle à AC menée par O.

Remarque. — La question 530 est un cas particulier de la

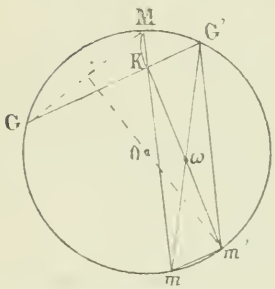
première partie. Dans l'hypothèse faite dans cette question, SH est alors hauteur et tombe au milieu de AB, enfin A'B' coupe SH en son milieu.

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny, Davidoglou et Tzitzeica.

QUESTION 555

Solution par Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

G, G' *étant deux points fixes d'une circonférence* O, K *un point fixe de la corde* GG'; *par un point quelconque* m *de la circonférence, on trace une corde* mm' *parallèle à* GG' *et une corde* mM *qui passe par* K.



1° *Le rapport* $\frac{m'G.MG'}{MG.m'G'}$ *est constant;*

2° *Déterminer* m *par la condition que le rayon* m'O *soit perpendiculaire sur* MG. (Bernès.)

1° Remarquons que $m'G = mG'$, $m'G' = mG$.

Donc
$$\frac{m'G.MG'}{MG.m'G'} = \frac{mG'.MG'}{MG.mG}$$
$$= \frac{\text{surf. } MmG'}{\text{surf. } MmG} = \frac{KG'}{KG}.$$

2° Si m'O est perpendiculaire sur MG, on a
$$m'M = m'G = mG'.$$

Ceci montre que $MG'mm'$ est un trapèze isoscèle; par suite $KG'mm'$ est un parallélogramme. On a donc $KG' = mm' = MG'$. En décrivant, de G' comme centre, avec G'K comme rayon, l'arc de cercle KM, on aura le point cherché. Le problème admet, en général, deux solutions.

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny, Davidoglou et Vazou, professeur au collège de Falaise.

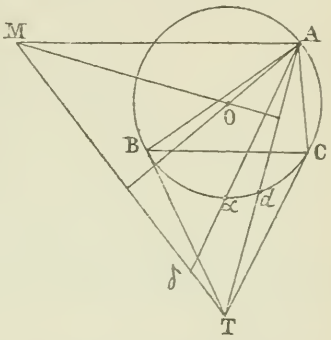
QUESTION 558

Solution par Ernest Foucart, élève au lycée Michelet.

Étant donné un triangle ABC,

1° La parallèle à BC *menée par* A, *la perpendiculaire abaissée sur la symédiane* Ad *du centre* O *du cercle* ABC, *et la perpendiculaire à* AO *menée par le point de rencontre* T *des tangentes en* B *et* C *à la circonférence* ABC, *sont trois droites concourantes;*

2° Si cette dernière perpendiculaire rencontre en δ, δ' *les bissectrices de l'angle* A, *le cercle décrit sur* δ, δ' *comme diamètre et le cercle* ABC *ont pour axe radical la symédiane* Ad. (Bernès.)



1° A*d* passe comme on sait par T; les droites considérées sont donc les hauteurs du triangle AOT et par suite concourent en un point M.

2° Soit α le milieu de l'arc BC; on a

$$\widehat{M\delta A} = 90^\circ - \widehat{\delta AO} = 90^\circ - \widehat{o\alpha A} = \widehat{MA\delta}.$$

Le triangle MδA est isoscèle; M est donc le centre du cercle $\delta\delta'$. Or, MO est la ligne des centres des cercles considérés; comme elle est perpendiculaire sur A*d* et que A est un point commun à ces deux circonférences, le théorème se trouve démontré.

Nota. — Solutions analogues par MM. Dhavernas, élève au lycée Michelet; Droz-Farny; Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

QUESTION 560

Solution par M. Vazou, professeur au Collège de Falaise.

Etant données quatre droites qui concourent en S, *si l'on coupe le faisceau en* A, B, C, D *par une circonférence arbitraire qui*

passe par S, *dans le quadrilatère* ABCD, *le rapport* $\frac{AC.BD}{AD.BC}$ *est constant.* (Bernès.)

Désignons par R le rayon du cercle arbitraire qui passe par S, on a

$$AC = 2R \times \sin \widehat{ASC}$$
$$BD = 2R \times \sin \widehat{BSD}$$
$$AD = 2R \times \sin \widehat{ASD}$$
$$BC = 2R \times \sin \widehat{BSC}$$

par suite
$$\frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{\sin \widehat{AS}.\sin \widehat{BSDC}}{\sin \widehat{ASD}.\sin \widehat{BSC}}.$$

Le second rapport, ne contenant que les sinus des angles que les droites du faisceau forment entre elles, est visiblement constant; la proposition est donc démontrée.

Remarque. — Plus généralement, toute fonction homogène et de degré zéro des côtés ou des diagonales du quadrilatère ABCD est indépendante du rayon choisi; c'est une fonction constante.

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny; J. Duavernas; E. Foucart; E.-N. Barisien.

QUESTION 569

Solution par A. Droz-Farny.

Dans tout triangle, si h_a, h_b, h_c *désignent les trois hauteurs, et si* m_a, n_a *désignent les deux segments déterminés par la hauteur* h_a *sur le côté opposé à cette hauteur, on a*

$$\frac{m_a.n_a}{h_a^2} + \frac{m_b.n_b}{h_b^2} + \frac{m_c.n_c}{h_c^2} = 1 \text{ (*)}.$$

(E.-N. Barisien.)

On a : $m_a = b \cos C$, $n_a = c \cos B$.

$$\frac{m_a.n_a}{h_a^2} = \frac{bc \cos B \cos C}{h_a^2}.$$

(*) Énoncé rectifié.

Représentons par h'_a le segment inférieur de la hauteur h_a on sait que : $h'_a = 2R \cos B . \cos C$. et comme $bc = 2R.h_a$

$$\frac{m_a.n_a}{h_a^2} = \frac{bch'_a}{2R.h_a^2} = \frac{h'_a}{h_a}$$

$$\sum \frac{m_a.n_a}{h_a^2} = \sum \frac{h'_a}{h_a} = 1.$$

Autrement (*). — Soient A′, A″ les points où la hauteur h_a, rencontre le côté opposé et le cercle circonscrit au triangle donné. On a

$$m_a.n_a = AA'.A'A'',$$

or, $A'A'' = HA' = h'_a$ (H étant l'orthocentre),

donc $$m_a.n_a = h_a.h'_a.$$

L'égalité donnée devient

$$\sum \left(\frac{h'_a}{h_a}\right) = 1,$$

$$\frac{HBC}{ABC} = \frac{h'_a}{h_a} \quad \text{d'où} \quad \sum \left(\frac{HBC}{ABC}\right) = \frac{ABC}{ABC} = 1,$$

donc $$\sum \frac{m_a n_a}{(h_a)^2} = 1.$$

Nota. — Nous avons reçu deux autres solutions; l'une, de M. Jean Négrétzu, à Bucharest; l'autre de Mme Ve F. Prime, à Bruxelles.

QUESTIONS PROPOSÉES (**)

588. — On considère une demi-ellipse Γ et le demi-cercle principal correspondant Δ. Soient : M, un point de Γ; O, le centre de Γ; F, l'un des foyers. On trace MA équipollent à OF.

Démontrer que OA rencontre Δ en un point qui appartient à la tangente en M. *(G. L.)*

(*) Cette solution est de M. Tzitzéica.

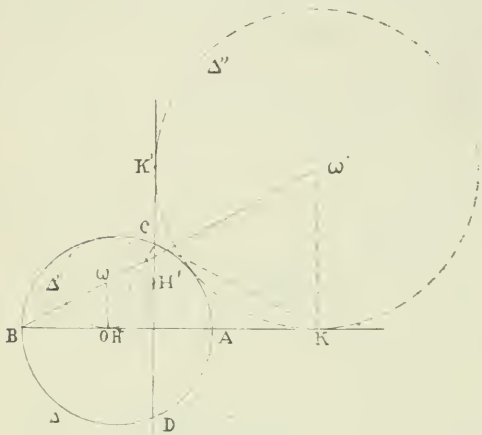
(**) J'ai notablement augmenté, dans ces derniers temps, le nombre des questions proposées. Ces exercices sont, en effet, très profitables à l'instruction des élèves qui font des mathématiques élémentaires avec le désir de poursuivre leurs études scientifiques. Je compte sur leur zèle pour m'adresser le plus rapidement possible les solutions de ces exercices.

(G. L.)

589. — Si deux sommets opposés d'un carré de grandeur variable glissent sur deux droites parallèles, les deux autres sommets décriront des figures symétriquement égales (*).

(G. Tarry.)

590. — On considère un cercle Δ, un diamètre AB de ce cercle et une corde CD perpendiculaire à AB. Au-dessus de AB, on décrit un cercle Δ', tangent à AB et à CD, touchant Δ intérieurement; puis un cercle Δ'', tangent à AB et à CD, touchant Δ extérieurement. Ces deux cercles Δ', Δ'' sont tangents à CD, de part et d'autre de cette droite.



Δ' a pour centre ω; il touche AB en H et CD en H'; Δ'' a pour centre ω', il touche AB en K et CD en K'. Cela posé,

1° Les droites CH et CK sont rectangulaires;

2° Les points H' et K' forment avec les points C et D une division harmonique.

3° La droite $\omega\omega'$ passe par une des extrémités du diamètre AB.

(E.-N. Barisien.)

591. — Soient trois points M_1, M_2, M_3 dont on connaît les coordonnées barycentriques $\alpha_1, \ldots$; soient a', b', c' les côtés du triangle $M_1M_2M_3$; $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$; et l, m, n des indéterminées dont la somme est nulle. Montrer que les coordonnées d'un point quelconque du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$ peuvent être représentées par

$$\alpha : \beta : \gamma = \left(\frac{a'^2\alpha_1}{l\sigma_1} + \frac{b'^2\alpha_2}{m\sigma_2} + \frac{c'^2\alpha_3}{n\sigma_3}\right) : \ldots$$

(*) Généraliser la proposition pour un quadrilatère quelconque *semblablement variable*.

En se donnant arbitrairement m et n, on a ainsi une infinité de points. — Application au cercle de Brocard.

(A. Poulain.)

592. — Deux circonférences de centres O et O′ se rencontrent en M et M′. Par le point M, on mène une corde quelconque qui rencontre le cercle O en A et le cercle O′ en B. Par le même point M, on trace la corde symétrique de la précédente par rapport à une parallèle menée par M à la ligne des centres OO′ : cette corde rencontre le cercle O en A′ et le cercle O′ en B′.

1° Le lieu du point de rencontre des droites AA′ et BB′ est une ligne droite;

2° Le lieu du point de rencontre des droites AB′ et A′B est une hyperbole;

3° Le lieu du centre des moyennes distances des quatre points A, B, A′, B′ est une ligne droite. *(E.-N. Barisien.)*

593. — On considère trois points en ligne droite A, B, C (C étant situé entre A et B) et on décrit les cercles ayant pour diamètres respectifs AB, CA et CB. Le cercle tangent à la fois à ces trois cercles touche le cercle CA en M et le cercle CB en N.

Les quatre points M, N, A et B sont sur un même cercle.

(E.-N. Barisien.)

594. — Étant donné un triangle ABC, sur chaque côté tel que BC, on prend les deux points α et α' symétriques des points B et C, par rapport au pied de la hauteur issue de A. On joint $A\alpha$ et $A\alpha'$ et on considère les autres droites analogues : $B\beta$, $B\beta'$; $C\gamma$, $C\gamma'$.

Ces six droites déterminent vingt triangles.

Montrer que l'un de ces triangles sera équilatéral si les angles du triangle ABC sont

$$30^\circ \quad 70^\circ \quad 80^\circ,$$

ou

$$40^\circ \quad 60^\circ \quad 80^\circ.$$

(On excepte le cas où le triangle ABC est équilatéral.)

(E.-N. Barisien.)

595. — La droite qui joint l'orthocentre d'un triangle à son

centre de gravité ne peut passer par un des sommets du triangle que si le triangle est rectangle ou isoscèle.

(E.-N. Barisien.)

596. — Par le sommet A du triangle ABC passe une droite variable qui rencontre BC en D et la circonférence ABC en E.

1° Lieu du centre de chacun des cercles BDE, CDE. 2° Lieu du second point d'intersection du cercle BDE avec le cercle décrit de B comme centre avec BD ou avec BE comme rayon. 3° Idem avec le cercle d'Apollonius relatif au sommet E du triangle ABE. 4° Idem avec le cercle de centre S et de rayon SD, où S est la rencontre de AB et de la parallele menée par D à CE. *(Bernès.)*

597. — Sur le côté BC du triangle ABC un point D s'éloigne à l'infini ; E étant la rencontre de AD avec la circonference ABC et S la rencontre de AB avec la parallèle menée par D à CE, déterminer la position-limite du second point d'intersection de la circonférence BED et de la circonférence décrite de S comme centre avec SD pour rayon. *(Bernès.)*

598. — La médiatrice du côté AB du triangle ABC rencontre la circonférence ABC en E, E′ et les droites AE, AE′ rencontrent BC en D et D′. Démontrer que la circonférence BED passe par le centre de la circonférence BAD, et de même la circonférence BE′D′ par le centre de la circonférence BAD′.

(Bernès.)

599. — La symédiane issue de A dans ABD rencontre en Δ la circonférence ABC, et le cercle d'Apollonius relatif à A coupe AB en F. La symédiane issue de F dans le triangle FAΔ rencontre en G la circonférence FAΔ. Démontrer : 1° que le point G est sur le cercle d'Apollonius; 2° que la circonférence ACG passe par l'un des points de Brocard de ABC.

(Bernès.)

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23648-11-94

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Arithmétique et Algèbre.

Pages.

Sur certaines généralisations de l'équation de Pell, par *G. L.* 11
Remarques sur les propriétés fondamentales des polynômes entiers, par M. *Maurice Fouché*. . . . 25
Notice historique sur la sommation des progressions géométriques décroissantes par M. *A. Aubry* 49
Note sur les caractères de divisibilité, par M. *Lalbalétrier* 54-73
Sur la pratique de la multiplication et de la division, par M. *Aubry* . 97
Sur la théorie des amortissements, par M. *Aubry*. . 125
L'arithmétique avec les figures négatives, par *G. L.* 265

Géométrie.

Sur les centres de rotation, par M. *A. Poulain*. . . . 2
Le calcul de la bissectrice, par M. *E. Lauvernay* . . 4
Sur l'inscription approchée de l'ennéagone régulier, par *G. L.*. 12
Construction d'une ellipse, par *C. Margerie* 15
Une construction de la tangente à l'ellipse, par *G. L.* 54
Sur le trapèze, par M. *Vautré*. 93
Note sur le dodécaèdre et l'isocaèdre, par M. *J. Cernesson*. . . . 121, 145
Note sur les symédianes, par M. *J. Dhavernas*. . . 169
Sur les triangles dont les côtés sont en progression arithmétique, par M. *Droz-Farny*. 193
Propriétés du triangle, par M. *Mackay* 217
Sur les figures semblables, par M. *Dorlet*. 241

Baccalauréats.

Alger — Aix — Besançon — Bordeaux (*avril* 1893) . . 18
Caen — Clermont — Grenoble — Lille — Lyon *(id.)* 30
Poitiers — Toulouse — Rennes *(id.)* 85
Paris — Montpellier — Nancy — Rennes (*juillet* 1893). 109
Toulouse — Lille — Rennes *(id.)* 129
Paris — Aix — Alger — Rennes — Toulouse — Grenoble — Poitiers — Besançon — Caen — Clermont — Dijon — Bordeaux *(id.)* 178
Paris (*avril* 1894) — Aix — Alger — Besançon — Bordeaux — Caen — Clermont — Dijon — Grenoble — Lille — Lyon — Montpellier — Nancy — Poitiers — Rennes — Toulouse (*nov.* 1893). . . 203
Paris (*juillet* 1894) — Alger — Aix — Besançon — Bordeaux — Caen — Clermont — Dijon — Grenoble — Lille — Lyon (*avril* 1894). 223
Paris (*nov.* 1894) 251
Aix — Alger (*juillet* 1894) . 274
Paris (*octobre* 1894) 276

Concours divers.

Examens de Saint-Cyr (concours de 1894), solution par M. l'abbé *Reboul*. 163

Pages

Examens de Saint-Cyr (énoncé de la question posée à Rouen). 165
Concours général de première-sciences; solution par M. *Monsallut*. 197
Institut national agronomique (concours de 1894, *énoncés*) 222
Écoles nationales d'agriculture (concours de 1894, *énoncés*) 222

Mélanges et Correspondance.

Exercices divers par M. *A. Boutin*, 17, 28, 65, 79, 108, 126, 160, 170, 246, 270
Extrait d'une lettre de M. *d'Ocagne*. 30
Extraits de diverses lettres de MM. *Sollertinsky*, *H. Brocard*; Tesch. 63
Note sur la question 503, par *E. Lemoine* 81
Extraits de lettres de MM. *Lemoine* et *d'Ocagne*, à propos de la construction donnée par *G. L.* pour la tangente à l'ellipse . . . 83
Note sur l'exercice 315, par M. *Ch. Michel*. 87
Extrait d'une lettre de M. *Bernès*, relative à la géométrographie 128
Note sur la question 510, par *un ancien élève de mathématiques spéciales* 131
Recherches sur l'équation d'un lieu géométrique, par M. *Zaremba* 147
Extrait d'une lettre de M. *Foucart* 162
Piège cinématique, par M. *Tarry* 196
Extrait d'une lettre *anonyme*. 201

Bibliographie.

Les femmes dans la science, par M. *Rebierre* (compte rendu, par *G. L.*). . . . 129
Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, par M. *Maurice d'Ocagne* 166
Arithmétique graphique, par M. *Gabriel Arnoux*. . . . 167
Cours de géométrie, par M. *Andoyer*, avec une préface de M. *J. Tannery* 172
Geometrical conics, par MM. *Milne* et *Davis*; compte rendu par *G. L.* 202
Exercices d'arithmétique, par *F. J.*; compte rendu, par *G. L.*. 248
Algèbre à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement classique et moderne, par M. *Giraud*. 249
Exercices de géométrie descriptive, par *F. J.* 250
Récréations mathématiques, par M. *Ed. Lucas*; compte rendu, par *G. L.* 250
Société philomathique de Bordeaux, sommaire de la *XIII*e exposition . . . 251
Trigonométrie à l'usage des candidats aux baccalauréats, par M. *L. Giraud*. 273
Théories météorologiques et prévision du temps, par M. *E. Guilhon* 273
Trattato di Aritmetica razionale, par M. *Giovanni Garbieri* 274

Questions proposées.

531 à 599.

Questions résolues.

483, 495, 494, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 408, 248, 242, 257, 272, 382, 442, 465, 508, 510, 511, 519, 512, 514, 520, 522, 523, 527, 525, 517, 510, 530, 529, 533, 534, 535, 536, 537, 337, 387, 441, 469, 538, 539, 540, 541, 543, 544, 545, 547, 548, 528, 550, 552, 553, 554, 555, 558, 560, 569.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

ALETROP, 34, 115, 119.
ANDOYER, *maître de conférences à la Sorbonne*, 172.
ANONYME, 201.
ARNOUX (G.), *ancien officier de marine*, 167.
AUBRY, 49, 97, 125.
BARISIEN, *ancien élève de l'école Polytechnique*, 35, 46, 47, 48, 119, 135, 136, 168, 209, 212, 236, 239, 240, 252, 2 9, 261, 262, 264, 284, 286, 287, 288.
BÉNÉZECH (L.), 37, 38, 72, 254.
BERNÈS, 128, 140, 143, 144, 258, 276, 280, 282, 283, 284, 288.
BERTRAND (J.), 231.
BOUTIN (A.), 17, 28, 65, 79, 87, 108, 126, 160, 170, 246, 270.
BROCARD, 64, 210, 233.
CADIX (Max.), 14.
CATALAN, 213, 256.
CERNESSON (J.), *professeur au lycée de Sens*, 121, 145.
COLLIGNON, 97, 267.
DAVIDOGLOU, *élève au lycée de Berlad*, 213, 236, 253, 259, 277, 278, 282.
DAVIS (R.-F.), 202.
DORLET, *professeur au lycée de Roanne*, 241.
DELLAC, *professeur au lycée de Marseille*, 23, 34, 144, 226, 231, 232.
DHAVERNAS, *élève au lycée Michelet*, 141, 169, 213, 253, 259, 277, 283.
DROZ-FARNY, *professeur au lycée de Porrentruy*, 36, 37, 38, 40, 42, 45, 47, 115, 119, 120, 185, 187, 189, 191, 193, 209, 214, 215, 234, 235, 236, 239, 240, 253, 256, 259, 277, 282, 283, 284.
FIERVILLE, *censeur des études au lycée Charlemagne*, 67.
FOUCART, *élève au lycée Michelet*, 36, 39, 42, 45, 118, 119, 120, 135, 138, 162, 185, 192, 209, 214, 215, 234, 235, 236, 253, 259, 264, 277, 278, 280, 283, 284.
FOUCHÉ (M.), *professeur à Sainte-Barbe*, 25, 120, 216, 277.
F.-J., 248, 250.
FRIAS (R.-F.), 14.
FUHRMANN, 221.
GÉRARD (L.), *professeur au lycée de Lyon*, 106, 273.
GIOVANNI GARBIERI, *professeur à l'Institut de Genève*, 274.
GILLET (J.), 33.
GIRAUD, *professeur de mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux*, 249.
GREENSTREET (W.), *M. A*, 33, 35, 115, 119, 133, 134, 136, 139, 185, 210, 214, 215, 232, 239.
GROLLEAU, *répétiteur général au lycée de Marseille*, 36, 40, 89, 93, 115, 116, 119, 136, 142, 185, 191, 209, 234.
GUILHON, *lieutenant de vaisseau*, 273.
LAISANT, *Dr ès sciences*, 3.
LALBALÉTRIER, 54.
LAURENT (H.), *examinateur d'admission à l'école Polytechnique*, 24.
LAUVERNAY, 4, 24, 39, 40, 42, 42, 114, 115, 116, 119, 133, 134, 233, 263.
LEMOINE (E.), 81, 83, 96, 128,

111, 112, 139, 252, 257, 262, 263, 264.
Lévy (L.), *examinateur d'admission à l'école Polytechnique*, 24, 36, 96, 189, 210, 263, 276.
Longchamps (de), 5, 12, 47, 48, 54, 81, 88, 96, 127, 141, 172, 192, 197, 202, 216, 235, 248, 250, 258, 261, 264, 265, 285.
Lucas (Ed.), 250.
Mackay (J.-S), *professeur à l'Académie d'Edimbourg*, 217.
Mannheim, *professeur à l'école Polytechnique*, 47, 168, 184, 191, 215, 234, 262.
Margerie, *ancien élève de l'école Polytechnique*, 15.
Michel, *élève à l'école normale supérieure*, 87.
Milne (J.), 202.
Monsallut, *professeur au lycée de Limoges*, 197.
Négrétzu (J.), 285.
Neuberg, *professeur à l'Université de Liège*, 30, 63, 64, 93, 221.
Niewenglowski, 247.
Noyer, 162.
Ocagne (d'), *répétiteur à l'école Polytechnique*, 19, 30, 70, 72, 89, 136, 166.
Poulain (A.), 3, 185, 187, 287.
Prime (Mme Ve F.), 39, 111, 112, 114, 133, 214, 215, 216, 234, 235, 236, 239, 253, 258, 276, 278, 285.
Reboul (l'abbé), *professeur au collège de Belley*, 163.
Rebière, *examinateur d'admission à Saint-Cyr*, 129.
Saint-Germain (de), 147.
Sanchez, 78.
Sollertinsky, 63, 72, 256.
Spino (Cesar), 40, 120, 133.
Tannery (J.), *sous-directeur de l'école Normale*, 172.
Tarry (G.), 192, 196, 286.
Tesch, 65.
Tchebychef, 231.
Times (de), 24, 36, 118, 120, 136, 139, 184, 209, 215.
Tzitzeica, *élève à l'école Normale de Bucarest*, 212, 214, 215, 234, 235, 236, 253, 254, 259, 278, 285.
Vautré, *professeur au séminaire d'Autrey*, 99.
Vazou, *professeur au collège de Falaise*, 210, 259, 282, 283.
Verrière, *élève au lycée Louis-le-Grand*, 253.
Vigarié, 63.
Weill, *professeur au collège Chaptal*, 88.
Youssoufian, 23, 115, 120, 133.
Zaremba (S.), *docteur ès sciences*, 147.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23648-11-94.

QA
1
J6836
sér.4
t.3E

Math.

Journal de mathématiques
élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY